

INGEGNERIA DEL SUONO Vol. 1

Dispense per il corso di Musica Elettronica

E. Giordani

LEMS- Conservatorio di Musica G. Rossini

1.1 Introduzione

La natura fisica del suono ed il fenomeno della sua propagazione, possono essere correttamente rappresentati attraverso una funzione continua del tempo e dello spazio $f(t, x)$. La sola natura vibrazionale, indipendente dalla propagazione, può essere invece rappresentata da una funzione solo del tempo $f(t)$, generalmente continua, come mostrato in figura 1.1

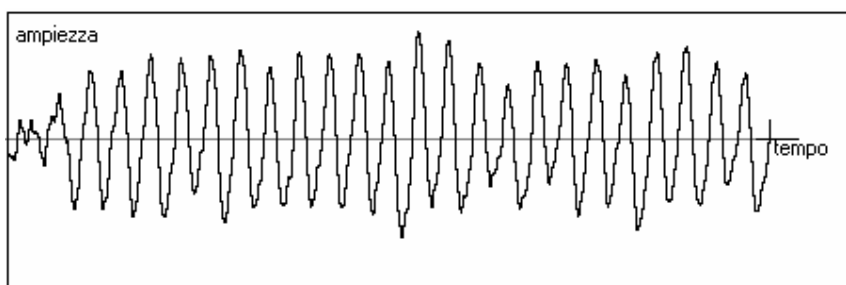


Fig. 1.1 Rappresentazione di un segnale audio nel dominio del tempo. L'ampiezza della vibrazione (valore istantaneo della pressione dell'aria) è rappresentata sull'asse verticale mentre il tempo su quello orizzontale. Il diagramma mostra l'andamento reale della pressione acustica relativa alla fase iniziale (pochi millisecondi) di una nota di pianoforte nell'ottava centrale. La scala delle ampiezze è lineare e arbitraria.

Da un punto di vista terminologico e operativo, la rappresentazione astratta delle variazioni di una certa grandezza fisica in funzione del tempo è definita con il termine di *segnale*.

Sebbene l'origine di questa denominazione derivi direttamente dal campo della Teoria dell'Informazione e delle Comunicazioni, una parte significativa delle proprietà che caratterizzano i messaggi sonori e musicali può essere analizzata attraverso i metodi di indagine matematica propri di tali discipline.

Lo studio dei segnali acustici naturali e sintetici e la loro possibile elaborazione fa largo uso di concetti e procedimenti che provengono da campi della fisica e della matematica.

I segnali possono essere classificati secondo alcune proprietà importanti che ne identificano la natura particolare. Una prima grande classificazione consiste nel distinguere i *segnali periodici* e i *segnali aperiodici*. Nel prossimo paragrafo saranno presi in considerazione le proprietà più significative dei segnali periodici attraverso la loro rappresentazione nel dominio del tempo e successivamente nel dominio della frequenza.

1.2 Segnali Periodici

Osservando la figura 1.1 si può notare come le variazioni istantanee dell'ampiezza tendano ad assumere una morfologia di tipo ripetitivo che è una prerogativa tipica dei segnali periodici. Benchè in prima approssimazione sia sempre possibile valutare se un segnale sia di natura periodica è opportuno dare una definizione più formale di periodicità.

Dato il segnale $s(t)$ rappresentato in fig.1.2, esso risulta periodico se esiste una quantità T chiamata *periodo* tale che sia sempre soddisfatta la seguente relazione:

$$s(t) = s(t + T)$$

1.1

Il periodo è quindi il tempo necessario per completare una singola oscillazione e si misura in secondi o nei suoi principali sottomultipli: millisecondi (ms o 10^{-3} s) o microsecondi (μ s o 10^{-6} s)

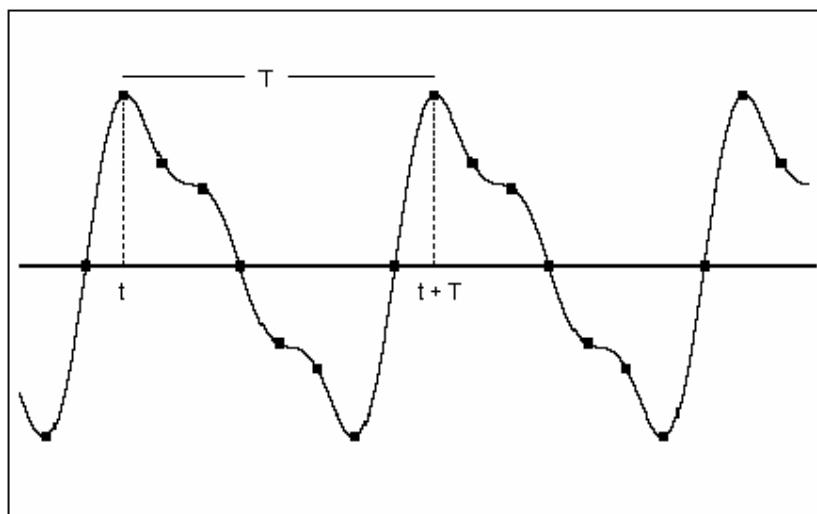


Figura 2.1 Segnale periodico di periodo T in cui sono stati marcati alcuni punti. La condizione di periodicità deve essere verificata per ogni punto del periodo stesso.

E' importante sottolineare che la condizione di periodicità sia verificata in ogni punto del periodo stesso.

1.3 La serie di Fourier

La serie di Fourier è concettualmente uno strumento matematico che consente di rappresentare un segnale di qualsiasi morfologia temporale, purchè periodico, attraverso la somma pesata di funzioni sinusoidali. Dal punto di vista formale, detto $s(t)$ un qualunque segnale periodico, si può scrivere:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad \boxed{1.2}$$

dove $\omega = 2\pi f$

e $n = 1,2,3,4,\dots,\infty$

La serie risulta quindi costituita da infinite coppie di termini (o componenti) sinusoidali e cosinusoidali, per ciascuna delle quali occorre determinare la relativa ampiezza (ovvero il valore dei coefficienti a_n e b_n), e le

cui frequenze sono determinate secondo una successione di numeri interi positivi più un termine a_0 che rappresenta il valore medio del segnale o *componente continua*.

I termini parziali della somma sono denominati *componenti armoniche* del segnale delle quali quella di ordine $n=1$ è detta *componente fondamentale* o *prima armonica* la cui frequenza è :

$$f = \omega/2\pi$$

Da ciò si trae che la frequenza della componente f_n di ordine n è pari a :

$$f_n = n f$$

I coefficienti a_0 , a_n e b_n valgono rispettivamente:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega t dt$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega t dt$$

Il termine a_0 si ottiene integrando il segnale $s(t)$ e mediandolo per un ciclo completo e ciò equivale a calcolare (a meno della costante $1/T$) l'area sottesa dalla funzione che rappresenta il segnale stesso. Tale quantità prende il nome di *valore medio* della funzione. Per questo motivo è facile intuire che tutti i segnali periodici nei quali il semiperiodo positivo è identico e speculare rispetto al semiperiodo negativo, hanno valore medio identicamente nullo. Se viceversa il termine a_0 risulta diverso da zero allora il valore medio è anch'esso diverso da zero e può quindi assumere un valore o positivo o negativo. Questa quantità viene a volte indicata alternativamente con il termine *offset* o *componente continua* .

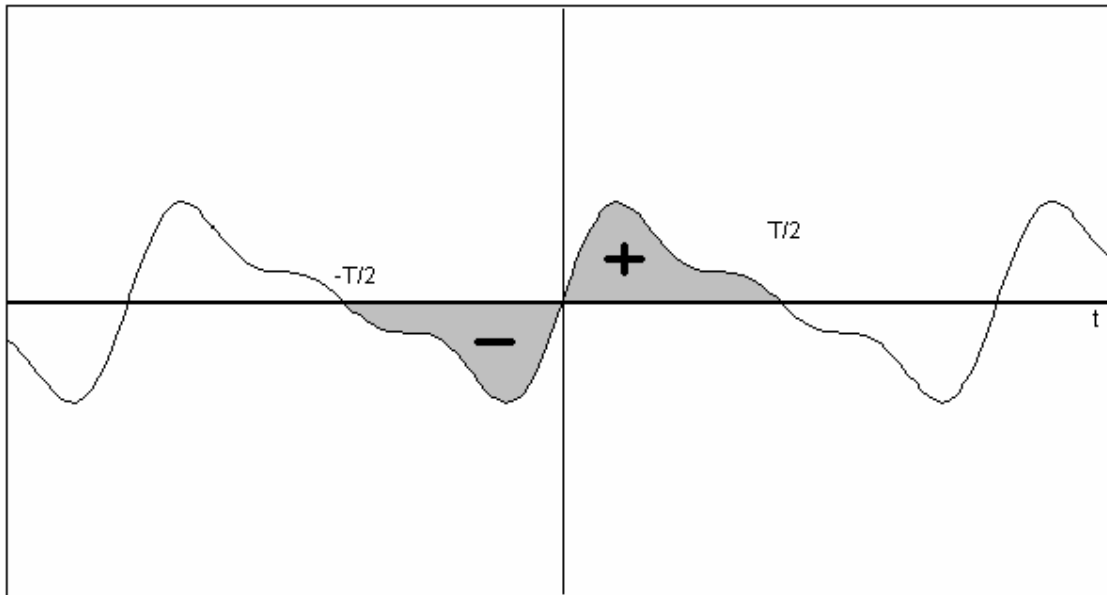


Figura 3.1 Segnale periodico di periodo T di valore medio nullo. Infatti l'area sottesa dai due semiperiodi (positivo e negativo) è nulla.

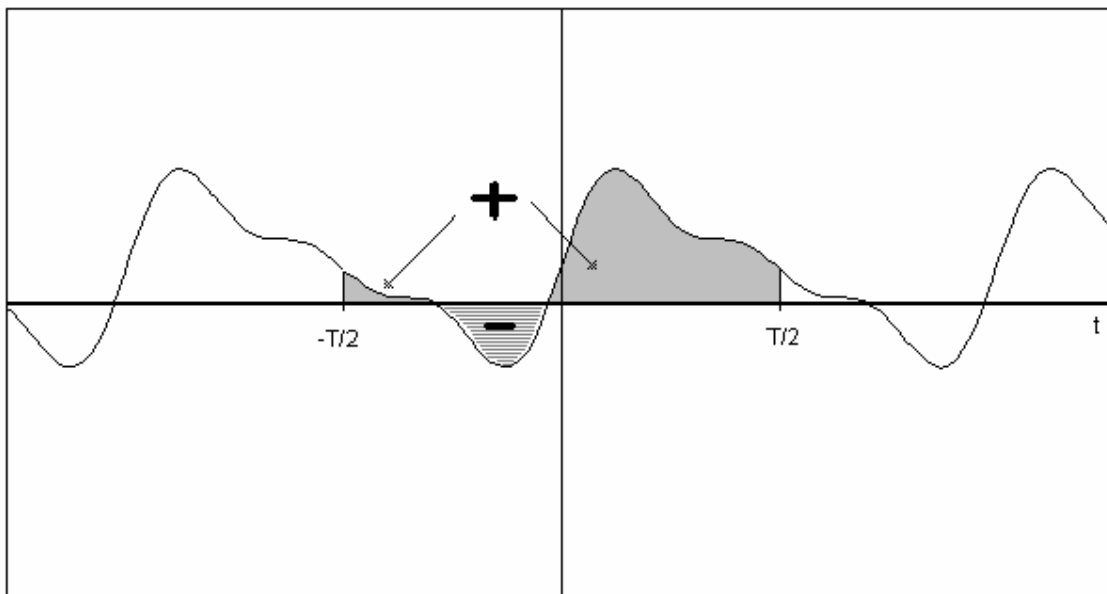


Figura 4.1 Segnale periodico di periodo T di valore medio non nullo. Prevale l'area positiva e quindi il valore medio è diverso da zero e positivo. In fatti tale segnale è stato ottenuto dal precedente a media nulla aggiungendola costante 0.5.

I coefficienti a_n e b_n si ottengono invece integrando all'interno di un periodo una funzione data dal prodotto del segnale da analizzare per le funzioni coseno e seno rispettivamente. Poichè come si vede tali funzioni hanno frequenze multiple intere, l'integrale del loro prodotto con il segnale da analizzare ha lo scopo di rilevare la presenza di medesime componenti localizzate solo su tali valori della frequenza. In altre parole, una volta definita la frequenza della fondamentale, il procedimento è in grado di evidenziare energia vibrazionale in corrispondenza dei multipli interi di tale frequenza. La costante $2/T$ tiene conto del fatto che nell'ampiezza delle singole componenti deve essere incluso anche il contributo delle componenti speculari a

frequenza negativa ed il cui significato matematico sarà chiarito analizzando la forma complessa della Serie di Fourier.

La formulazione teorica del procedimento di analisi permette quindi di conoscere con precisione qual'è l'ampiezza e quindi la fase delle singole componenti periodiche che costituiscono il segnale $s(t)$, a patto che sia possibile conoscere di detto segnale l'espressione analitica. Una volta noti i coefficienti è possibile rappresentare un segnale periodico attraverso il diagramma dei loro valori in funzione della frequenza.

La presenza dei termini seno e coseno consente di estrarre il valore corretto della fase delle singole componenti nell'intervallo di valori continui definiti tra 0 e 2π . Infatti un segnale sinusoidale di fase qualunque può sempre essere rappresentato dalla somma algebrica di un segnale sinusoidale ed uno cosinusoidale di ampiezze opportune.

Il segnale risultante dalla somma è ancora un segnale sinusoidale, di frequenza uguale alle componenti seno e coseno ma di fase e ampiezza diverse come è mostrato chiaramente nelle figure 5.1 e 6.1

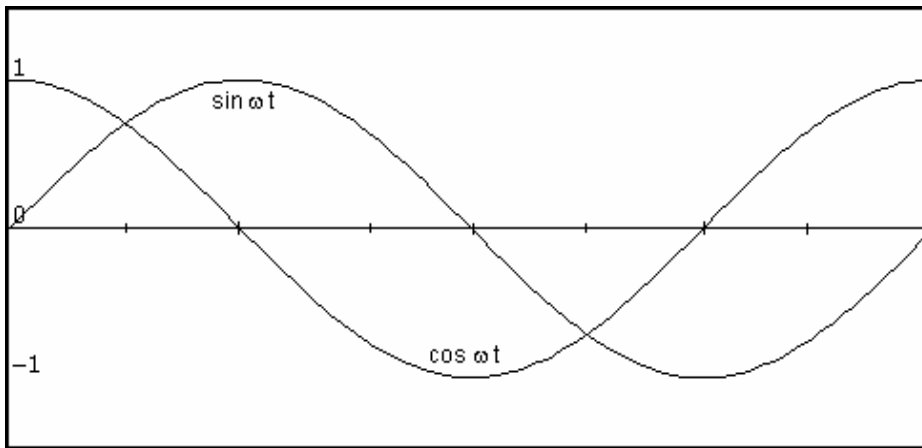


Figura 5.1 Segnali di tipo seno e coseno.

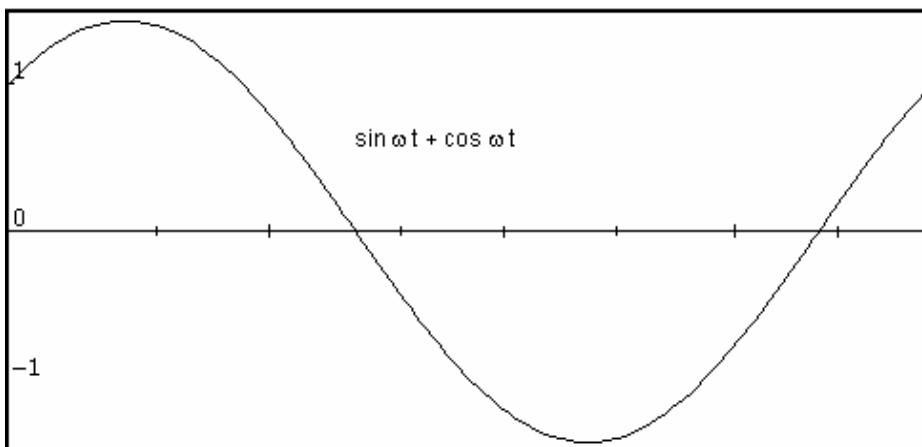


Figura 6.1 Segnale risultante dalla somma algebrica delle funzioni seno e coseno. Come si vede il segnale risultante è ancora una funzione sinusoidale di stessa frequenza ma di ampiezza e fase diverse rispetto all'ampiezza e fase delle singole funzioni.

Per l'n-esima componente si ha quindi :

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

Se indichiamo con A_n e φ_n rispettivamente l'ampiezza e la fase del segnale risultante, possiamo riscrivere la serie di Fourier nel modo seguente:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad 1.3$$

Tenuto conto della relazione trigonometrica :

$$A_n \sin(\alpha + \beta) = A_n (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

possiamo scrivere:

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n (\cos \varphi_n \sin n\omega t + \sin \varphi_n \cos n\omega t)$$

avendo posto $a_n = A_n \sin \varphi_n$
e $b_n = A_n \cos \varphi_n$

Elevando al quadrato e sommando membro a membro le due relazioni precedenti otteniamo:

$$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n)$$

e ricordando la relazione trigonometrica fondamentale $\sin^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n = 1$ si trae :

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

da cui

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

dove A_n rappresenta propriamente il *modulo* della singola componente.

Eseguendo invece il rapporto tra le stesse due relazioni si ottiene:

$$a_n / b_n = A_n \sin \varphi_n / A_n \cos \varphi_n$$

Essendo $\sin \varphi_n / \cos \varphi_n = \tan \varphi_n$

e $a_n / b_n = \tan \varphi_n$

si ottiene la fase dell'n-esima componente:

$$\varphi_n = \tan^{-1} a_n / b_n$$

Attraverso una semplice manipolazione matematica è quindi possibile rappresentare le componenti della serie attraverso il modulo e la fase rendendo la valutazione del contenuto frequenziale più diretta e immediata rispetto alla rappresentazione fornita dai coefficienti a_n e b_n .

Le componenti del segnale vengono allora rappresentate in diagramma A, f (modulo) e φ, f (fase) come singoli impulsi frequenziali. Tali diagrammi vengono comunemente chiamati rispettivamente *spettro di ampiezza* e *spettro di fase* (fig. 7.1 - 8.1)

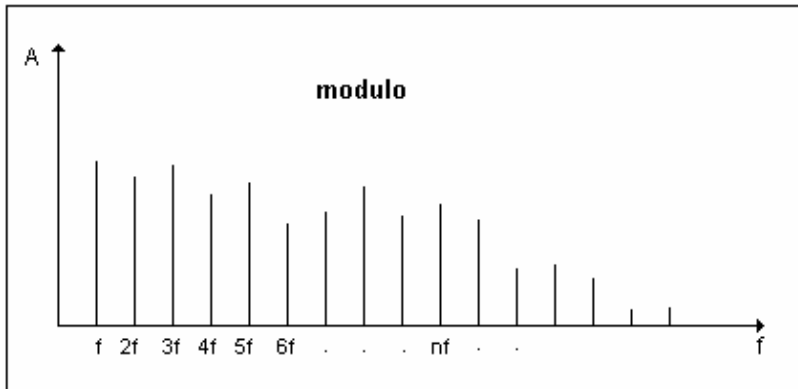


Figura 7.1 Rappresentazione dello spettro di ampiezza (modulo)

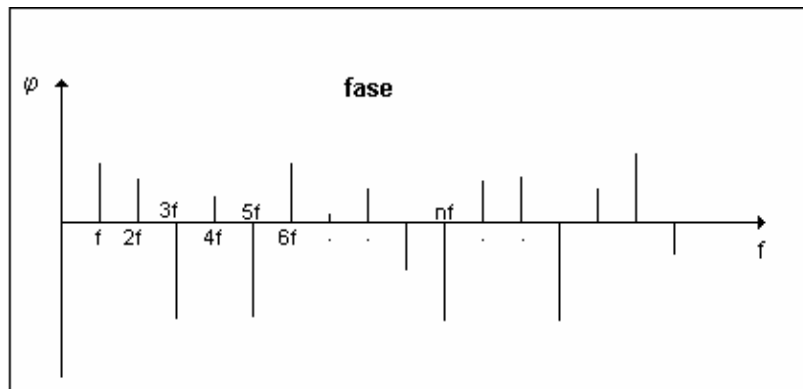


Figura 8.1 Rappresentazione dello spettro di fase

Ad esempio, per un certo segnale $s(t)$, supponiamo che i coefficienti della serie per $n=1$ siano rispettivamente $a_1 = 0.3$ e $b_1 = 0.4$. Possiamo allora calcolare il modulo A_1 e la fase φ_1 :

$$A_1 = \sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2} = (0.09 + 0.16)^{1/2} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} (0.3/0.4) = \tan^{-1} 0.75 = 0.64 \text{ rad} \quad (\text{ovvero } 36.8 \text{ deg})$$

L'applicazione del procedimento teorico del calcolo dei coefficienti della serie è subordinato alla conoscenza dell'espressione analitica del segnale $s(t)$. In questo esempio il segnale da analizzare è un' onda quadra il cui andamento tipico è mostrato in figura 9.1.

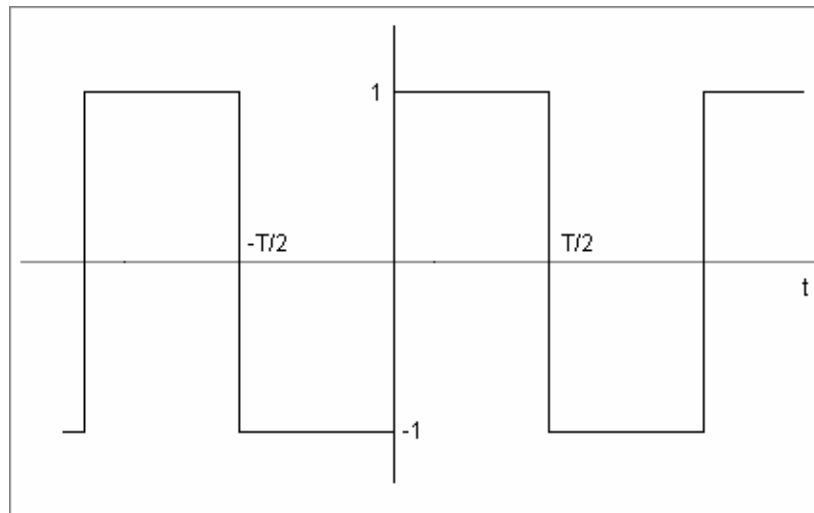


Figura 9.1 Andamento temporale dell'onda quadra o rettangolare

Per prima cosa calcoliamo il valore di a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

Analizzando il segnale dal punto di vista geometrico si può notare che la sua espressione analitica è la seguente:

$$s(t) = -1 \quad \text{per} \quad -T/2 < t < 0$$

$$s(t) = 1 \quad \text{per} \quad 0 < t < T/2$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 s(t) dt + \int_0^{T/2} s(t) dt \right] = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) dt + \int_0^{T/2} (1) dt \right] = \frac{1}{T} \left(- \left[t \right]_{-T/2}^0 + \left[t \right]_0^{T/2} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0 - T/2 + T/2 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Essendo nullo il termine a_0 ne consegue che il segnale è a media nulla, risultato deducibile in questo caso dalla semplice osservazione della morfologia del segnale.

Calcoliamo per primi i coefficienti b_n ricordando che:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \sin n\omega t \, dt + \int_0^{T/2} (1) \sin n\omega t \, dt = \\
 &= \frac{2}{T} \left(\left[\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_{-T/2}^0 + \left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} \right) = \\
 &= \frac{2}{n\omega T} [1 - \cos (-n\omega T/2) - \cos (n\omega T/2) + 1]
 \end{aligned}$$

e ricordando che in generale vale l'eguaglianza $\cos(x) = \cos(-x)$ si ha:

$$b_n = \frac{2}{n\omega T} [2 - 2 \cos (n\omega T/2)] = \frac{1}{n\omega T} [2 - 2 \cos (n\omega T/2)]$$

Essendo $\omega = 2Cf = 2\pi / T$, allora $\omega T = 2\pi$

Eseguendo la sostituzione si ottiene infine :

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [2 - 2 \cos (n\pi)]$$

Ora siamo in grado di valutare in modo semplice questa espressione per ogni valore di n e quindi si ha che per:

$$n = 1 \quad b_1 = \frac{2}{\pi} (2 - 2 \cos \pi) = \frac{2}{\pi} (2 + 2) = \frac{4}{\pi}$$

$$n = 2 \quad b_2 = \frac{2}{2\pi} (2 - 2 \cos 2\pi) = \frac{1}{\pi} (2 - 2) = 0$$

$$n = 3 \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} (2 - 2 \cos 3\pi) = \frac{2}{3\pi} (2 + 2) = \frac{4}{3\pi}$$

$$n = 4 \quad b_4 = \frac{2}{4\pi} (2 - 2 \cos 4\pi) = \frac{1}{2\pi} (2 - 2) = 0$$

$$n = 5 \quad b_5 = \frac{2}{5\pi} (2 - 2 \cos 5\pi) = \frac{2}{5\pi} (2 + 2) = \frac{4}{5\pi}$$

·
·

Possiamo notare che la serie dei coefficienti b_n è distribuita come una successione ordinata di valori scalari secondo la legge $4/n\pi$ valutata per n dispari mentre gli ordini pari sono tutti nulli.

Abbiamo volutamente lasciato per ultimo il calcolo dei coefficienti a_n dal momento che il risultato, la cui prova lasciamo per esercizio al lettore, fornisce per tali coefficienti sempre un valore nullo. La ragione di

questo fatto dipende dalla particolare morfologia del segnale analizzato, argomento di cui ci occuperemo in dettaglio nel seguito della trattazione

Possiamo allora scrivere la serie esplicitando i coefficienti non nulli ottenendo quindi:

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

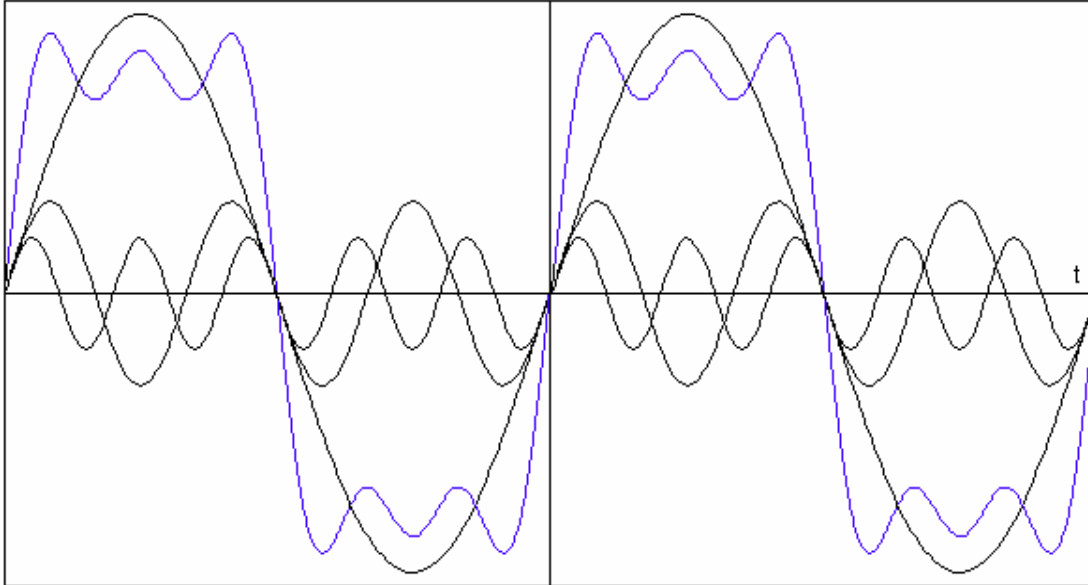


Figura 10.1 Andamento temporale delle componenti di ordine 1, 3 e 5 relative all'onda quadra e loro somma risultante (2 cicli completi).

Come si può notare dalla figura 10.1, le tre componenti non sono in grado di ricostruire l'andamento effettivo del segnale analizzato (figura 9.1) sebbene sia possibile individuarne la morfologia generale. Per ottenere l'esatta ricostruzione del segnale occorrerebbe specificare un numero *infinito* di componenti. Da un punto di vista acustico, è possibile ricostruire un'onda quadra attraverso la somma di un numero finito di componenti sinusoidali, tutte all'interno del campo di udibilità che va da 20 a 20000 hz. Ad esempio se si volesse sintetizzare un'onda quadra con frequenza fondamentale 220 hz (a3), sarebbero necessarie circa 91 componenti (20000/220), delle quali, la metà di esse sono ad ampiezza nulla.

Come era già stato anticipato, questo particolare segnale viene ricostruito attraverso la sola presenza dei coefficienti b_n , che sono i fattori di ampiezza delle componenti seno, mentre i termini a_n , che sono i fattori di ampiezza delle componenti coseno, sono tutti nulli. Ciò significa che l'ampiezza delle varie componenti coincide con i valori b_n essendo $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n$ mentre per la fase si ottiene $\varphi_n = \tan^{-1} a_n / b_n = 0$ per tutti i valori di n . Questo aspetto è evidenziato nella figura 10.1 osservando che le componenti tracciate sono tutte a fase nulla.

Una volta calcolati i coefficienti è possibile rappresentare lo spettro di ampiezza in un diagramma ampiezza-frequenza:

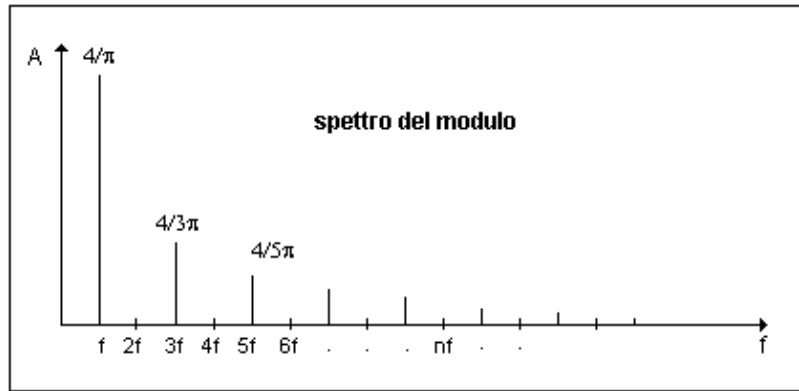


Figura 10.1 Spettro del modulo relativo all'analisi di Fourier dell'onda quadra

A meno di una costante di proporzionalità $4/\pi$, l'ampiezza delle componenti del segnale analizzato è distribuita secondo la relazione $1/n$, dove n rappresenta l'ordine dell'armonico e vale $1, 3, 5, 7, \dots$ etc.. Ogni componente viene rappresentata da un impulso di ampiezza pari al valore di picco della sinusoide relativa posto nella sua posizione frequenziale. L'insieme degli impulsi frequenziali costituisce un insieme discreto di componenti (spettro del modulo).

Naturalmente è del tutto superfluo tracciare l'andamento della fase dal momento che essa è identicamente nulla per ogni valore della frequenza.

La totale assenza delle componenti seno o coseno è dovuta a condizioni particolari di simmetria nell'andamento temporale di alcune categorie di segnali. Tali categorie sono individuate quando un per un segnale generico $s(t)$ di periodo T , sono verificate le seguenti proprietà:

1) Se $s(t) = s(-t)$ il segnale è una *funzione pari* ed è quindi simmetrico nell'origine rispetto all'asse delle ordinate. In questo caso sono nulli tutti i coefficienti b_n e quindi la serie è composta di soli termini coseno, più eventualmente il termine noto.

2) Se $s(t) = -s(-t)$ il segnale è una *funzione dispari* ed è quindi antisimmetrico nell'origine rispetto all'asse delle ordinate. In questo caso sono nulli tutti i coefficienti a_n e quindi la serie è composta di soli termini seno, più eventualmente il termine noto.

3) Se $s(t+T/2) = -s(t)$ sono presenti le sole componenti di ordine dispari, come nel caso dell'onda quadra.

4) Se $s(t+T/2) = s(t)$ sono presenti le sole componenti di ordine pari. Questo caso è banale poiché la serie che risulta $(2, 4, 6, 8, \dots)$ coincide con una serie completa $(1, 2, 3, 4, \dots)$ la cui frequenza fondamentale è doppia rispetto a $1/T$.

Vi sono alcune tipologie di segnali canonici periodici che rivestono un ruolo di fondamentale importanza, sia dal punto di vista teorico, che dal punto di vista acustico. Tra questi ricordiamo:

- Onda quadra simmetrica
- Onda quadra asimmetrica
- Onda triangolare
- Onda a dente di sega
- Onda a treno di impulsi

Le componenti di Fourier relative a tali funzioni sono nell'ordine:

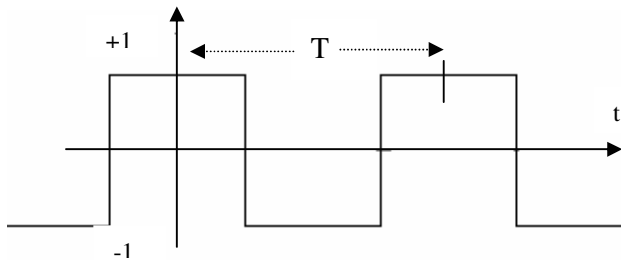
$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

$$s(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

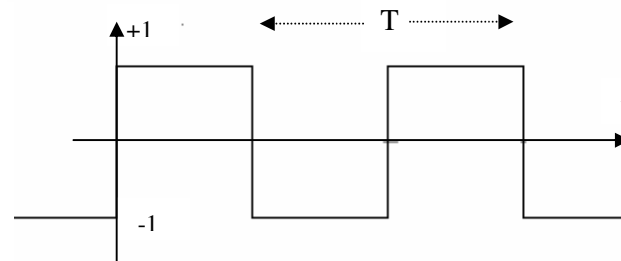
$$s(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

$$s(t) = \frac{\tau}{T} + 2 \frac{\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega\tau \frac{\sin (n\omega\tau / 2)}{n\omega\tau / 2}$$



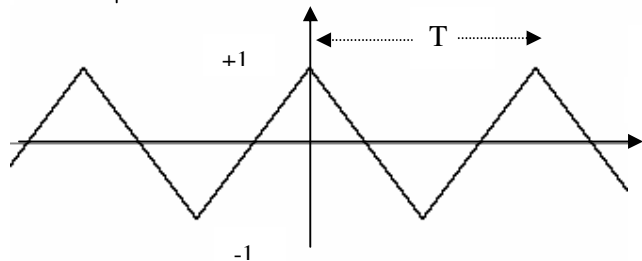
Onda quadra simmetrica

Figura 11.1



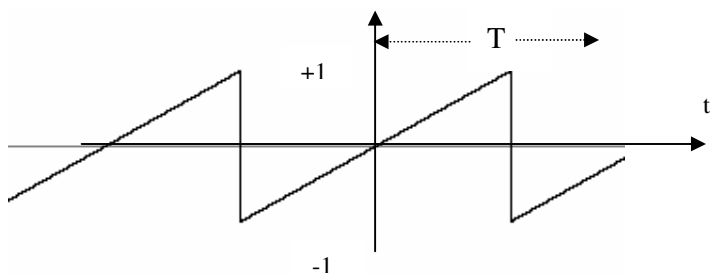
Onda quadra asimmetrica

Figura 12.1



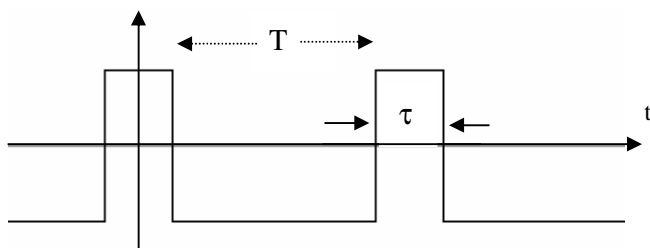
Onda triangolare

Figura 13.1



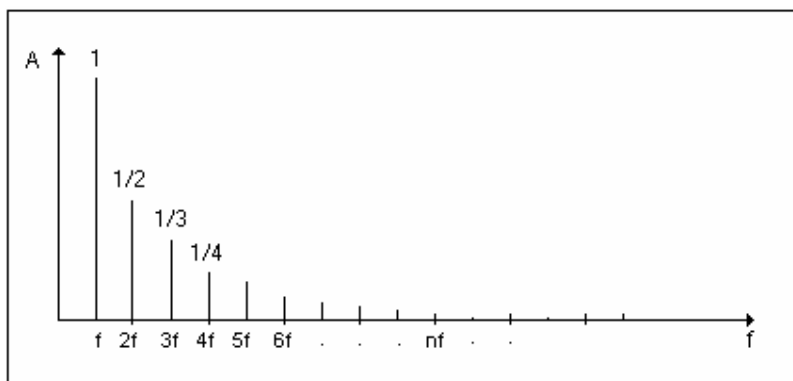
Onda a dente di sega

Figura 14.1



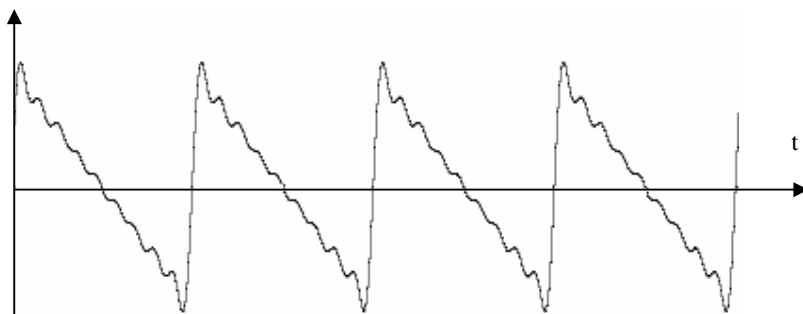
Treno di impulsi

Figura 15.1



Spettro di ampiezza delle prime 10 componenti di Onda a dente di sega

Figura 16.1



Andamento temporale dell'Onda a dente di sega con 10 componenti

Figura 17.1

L'insieme delle componenti spettrali di un segnale periodico può essere un quantità finita o infinita a seconda che il segnale stesso sia a banda limitata o illimitata.

Almeno in via teorica, i segnali canonici possono essere considerati segnali a banda illimitata, ma è possibile approssimare tali segnali attraverso la somma di un numero finito di componenti, come mostrato nella figura 17.1.

Da un punto di vista esclusivamente acustico-soggettivo, la costruzione approssimata di un segnale canonico per somma di componenti è indistinguibile dal segnale completo, a patto che il numero di componenti usate copra l'intero campo di udibilità.

Ad esempio, la ricostruzione di un onda a dente di sega di frequenza fondamentale 440 hz, si può approssimare sommando 36 componenti. Tale numero è dato dal rapporto tra la massima frequenza udibile (c.a. 16 Khz) e la frequenza fondamentale (440 hz).

1.4 Forma complessa della Serie di Fourier

La Serie di Fourier è quindi uno strumento matematico che consente di analizzare un segnale complesso, ma periodico, attraverso un insieme di componenti armoniche disposte frequenzialmente in modo discreto, secondo una successione di numeri interi. Lo spettro è quindi un insieme discreto di componenti armoniche la cui distribuzione di ampiezza si deduce dal calcolo dei coefficienti della serie (spettro a righe). La differenza frequenziale tra una riga e quella successiva è costante ed è pari al valore della fondamentale della serie stessa.

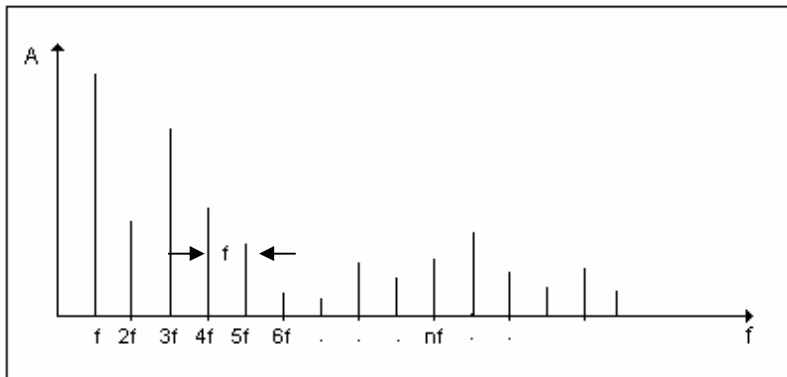


Figura 18.1

In altre parole, la Serie di Fourier consente di valutare la distribuzione dell'energia spettrale solo per un griglia frequenziale di estensione infinita e di risoluzione pari alla frequenza fondamentale del segnale in analisi e per questo motivo il suo impiego è idoneo solo per i segnali periodici.

Dal momento che i segnali reali non sono necessariamente di natura periodica, è necessario generalizzare il procedimento di analisi per rimuovere questa limitazione.

Da un punto di vista strettamente matematico è utile considerare un modo alternativo di scrivere la serie attraverso l'uso di quantità complesse.

A partire dalla relazione di Eulero:

$$e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$$

1.4

si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}$$

$$\sin \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}$$

Allora la 1.2 può essere riscritta nel modo seguente ponendo $\vartheta = n\omega t$

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta})/2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta})/2j = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n) e^{j\vartheta}/2 + (a_n + jb_n) e^{-j\vartheta}/2] \end{aligned}$$

Posto allora:

$$\begin{aligned} c_n &= (a_n - jb_n)/2 \\ c_{-n} &= (a_n + jb_n)/2 \\ c_0 &= a_0 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni dei coefficienti a_n e b_n si ottiene :

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$c_{-n} = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{jn\omega t} dt$$

Risulta allora:

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega t}$$

o anche

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \boxed{1.5}$$

La 1.5 definisce quindi la *forma complessa* della Serie di Fourier dalla quale si evince che, almeno matematicamente, un segnale periodico $s(t)$ può essere rappresentato da un insieme infinito di componenti di frequenze positive e negative (in riferimento all'indice n) sebbene da un punto di vista acustico le frequenze negative non abbiano significato fisico.

L'unica vera utilità di rappresentare la serie in forma complessa è la maggiore facilità di manipolazione matematica dovuta alla presenza delle funzioni esponenziali.

1.5 Dallo spettro discreto allo spettro continuo (Trasformata di Fourier)

Al fine di rendere il più possibile generale l'analisi dei segnali, occorre rimuovere la condizione che vincola l'applicazione del procedimento ai soli segnali periodici.

Supponendo di applicare la serie ad una funzione del tempo $s(t)$ periodica di periodo T , possiamo rendere la funzione aperiodica facendo tendere all'infinito il periodo T .

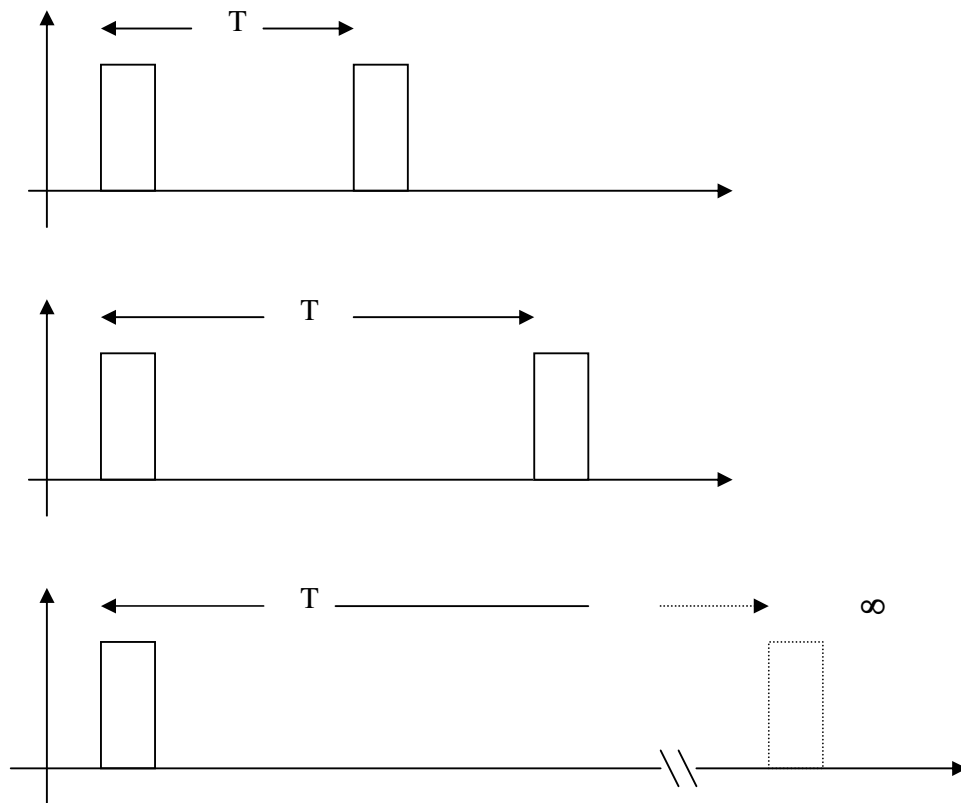


Figura 19.1 a)b)c) Forma d'onda periodica il cui periodo tende ad al valore ∞

Come si vede dalla schematizzazione, il segnale periodico degenera in un singolo *impulso aperiodico* quando $T \rightarrow \infty$. Applicando la forma complessa della serie si ottiene:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Essendo $f = \omega/2\pi$, si può scrivere $\omega = 2\pi/T$.

Poiché il periodo tende all'infinito, il valore ω di tende ad un valore differenziale $d\omega$ e risulta quindi:

$$1/T = d\omega/2\pi$$

I valori discreti dati dall'indice n non hanno più significato ed è lecito approssimare il termine $n\omega$ con un valore generico ω e sostituire la sommatoria con il segno di integrale.

Si può allora scrivere:

$$c_n = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

e quindi

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega t} dt$$

ovvero:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t}$$

Come si vede, la quantità tra parentesi quadra, una volta calcolata è una funzione della sola frequenza e vale quindi:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

L'espressione di $g(\omega)$ è detta **Trasformata di Fourier** e a differenza della Serie, esprime un andamento continuo di una vera e propria funzione che descrive la distribuzione frequenziale del segnale $s(t)$.

Per tale motivo, la trasformata di Fourier generalizza il concetto di analisi spettrale, nel senso che il procedimento evidenzia energia vibrazionale in ogni punto della frequenza e non solo su una griglia di valori discreti della frequenza.

La trasformata è un procedimento invertibile ed è quindi possibile calcolare l'integrale di Fourier o *Trasformata inversa*. Si ottiene allora:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La conseguenza pratica di questa generalizzazione è che qualsiasi segnale non periodico (impulsivo o transitorio) può essere scomposto in un somma di infiniti termini distribuiti in ampiezza secondo la funzione $g(\omega)$. Lo spettro risultante, a differenza di quanto visto per i segnali periodici, non è discreto ma continuo. In altre parole, le componenti sono contigue poichè la differenza è pari a $1/T$, cioè essendo $T \rightarrow \infty$, $1/T \rightarrow 0$.

Se consideriamo per esempio un impulso rettangolare definito nel modo seguente:

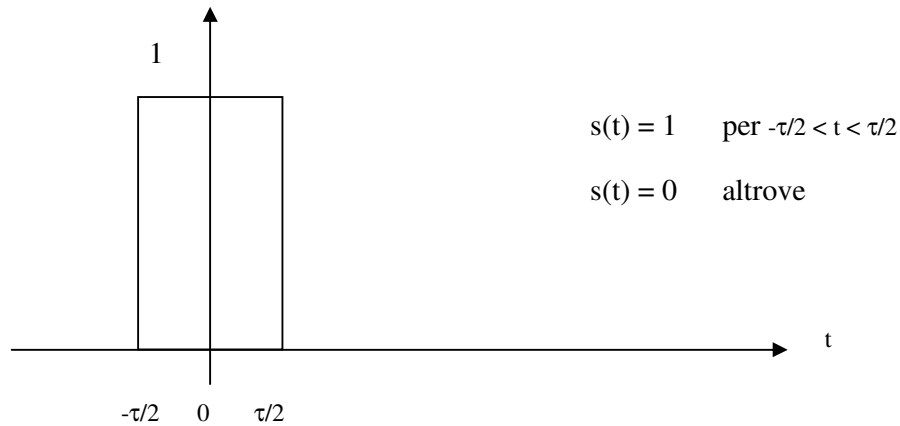


Figura 20.1 Forma d'onda impulsiva aperiodica

Si può dimostrare facilmente che :

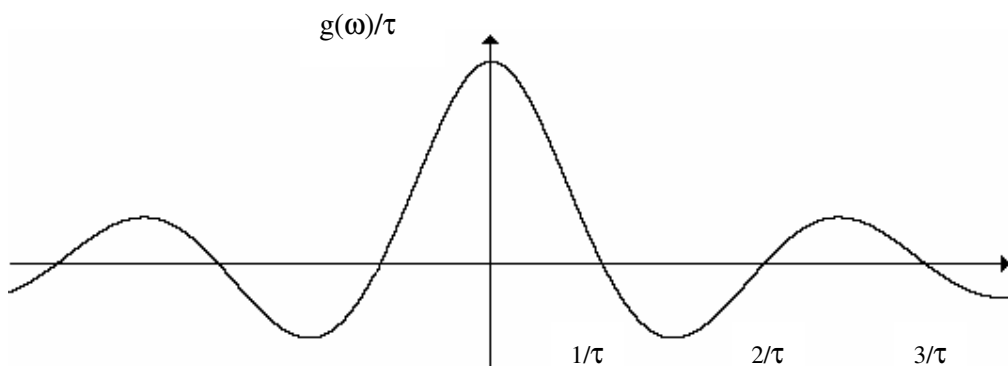
$$g(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 e^{-j\omega t} dt$$

da cui si ottiene:

$$g(\omega) = \tau (\sin \omega\tau/2) / \omega\tau/2$$

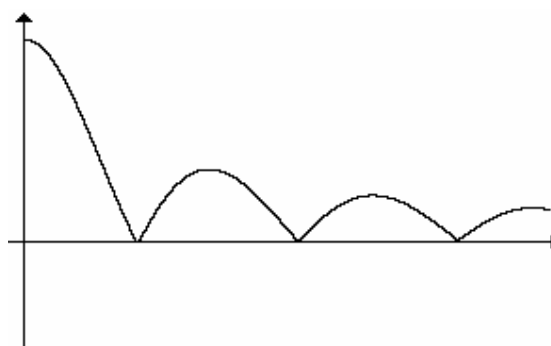
Ponendo $x = \omega\tau/2$ si ottiene la funzione:

$$g(\omega)/\tau = \sin x / x$$

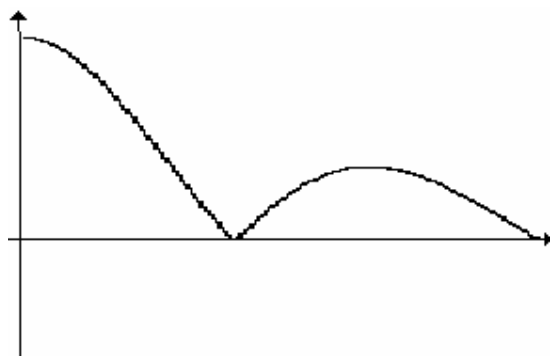


La trasformata di Fourier di un impulso è quindi una tipica funzione del tipo $\sin x / x$ i cui zeri sono multipli di $1/\tau$.

Considerando solamente le frequenze positive e il modulo, otteniamo un involucro spettrale la cui ondulazione dipende dalla durata τ dell'impulso.



Se $\tau \rightarrow 0$, l'ondulazione tende ad annullarsi ed in pratica il primo lobo della funzione tende ad una costante



Si può dimostrare facilmente che quando la durata dell'impulso tende a zero (impulso matematico), lo spettro tende ad un valore costante. Cioè in pratica sono presenti tutte le possibili componenti di ampiezza da 0 a ∞ .

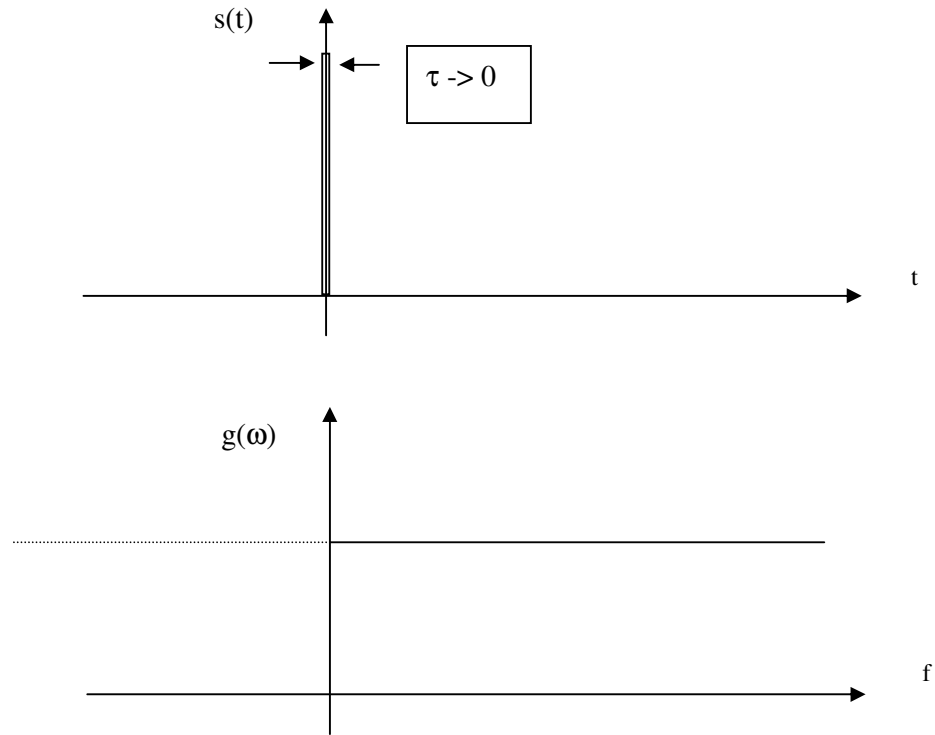


Figura 21.1 Impulso matematico e sua trasformata di Fourier

Questa corrispondenza spiega perché, nei sistemi audio, fenomeni transitori impulsivi (di brevissima durata) indesiderati introducono disturbi rumorosi a larga banda.

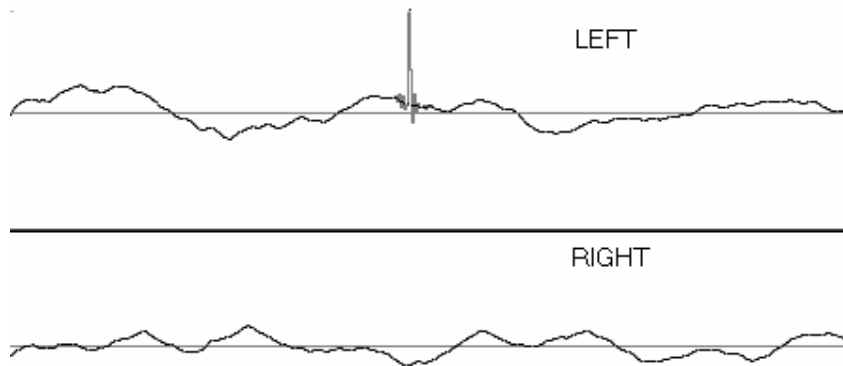


Figura 22.1 Andamento temporale di 20 ms di segnale audio stereofonico. Nel tracciato del canale è presente un fenomeno impulsivo di pochi microsecondi di durata.

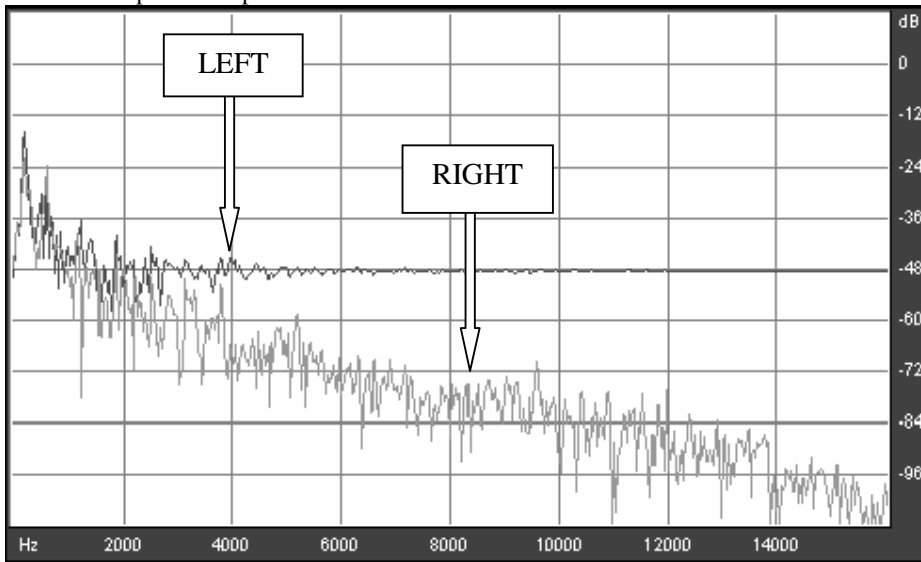


Figura 23.1 Misura spettrale del segnale della figura precedente. Si noti che il canale LEFT tende ad uno spettro praticamente piatto ed esteso indefinitamente.

Come si può notare dalle figure 22.1 e 23.1, la presenza dell'impulso sovrapposto al segnale del canale sinistro (Left), produce un surplus di energia spettrale chiaramente visibile nella seconda immagine. Acusticamente questo fenomeno viene percepito come un rumore di brevissima durata, ma di energia notevole.

1.6 Diagrammi per la rappresentazione spettrale

La misura spettrale dei segnali può essere eseguita secondo diverse modalità. Principalmente la misura può riferirsi a due diverse tipologie:

- rappresentazione **statica** dello spettro
- rappresentazione **dinamica** dello spettro (o **tempo-variante**)

Dal momento che i segnali reali non sono quasi mai rigorosamente periodici, una strategia comune è quella di valutare tratti quasi stazionari. Nel caso dei segnali con forte componente periodica (*quasi-periodici*) è in uso un tipo di analisi denominata **pitch-synchronous**. Tale metodo misura l'ampiezza delle componenti armoniche una volta che sia identificato la sua frequenza fondamentale (**pitch**).

La scala impiegata può essere lineare o logaritmica, sia per quanto riguarda l'ampiezza che la frequenza..

Generalmente la scala delle ampiezze è rappresentata in modo logaritmico impiegando il **decibel** come unità di misura.

Detta A_n l'ampiezza generica dell' n -esima componente, il valore in dB è dato da:

$$A_n|_{dB} = 20 \log A_n$$

Ad esempio, lo spettro d'ampiezza di un'onda quadra espresso in dB risulta essere il seguente:

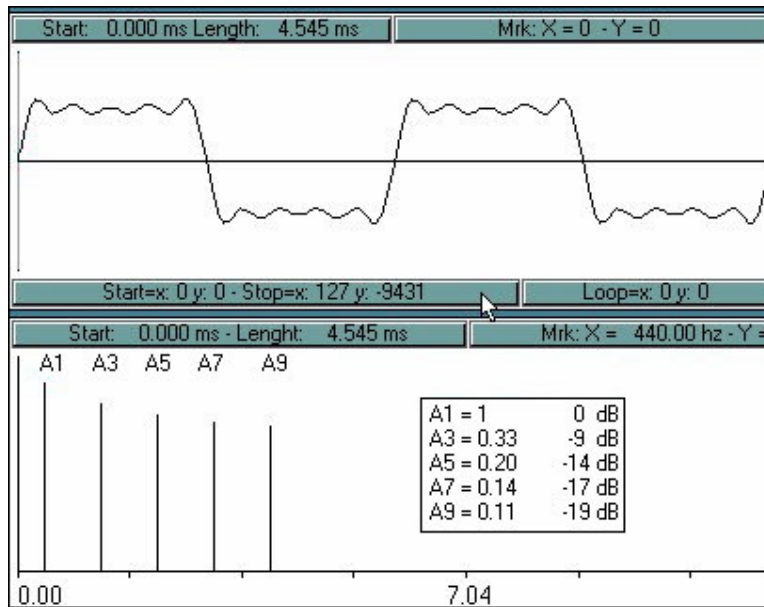


Figura 24.1

La valutazione dello spettro di segnali non stazionari, come ad esempio il segnale vocale o quello musicale, viene eseguito attraverso una misura strumentale. Infatti l'applicazione teorica sia della serie che della trasformata di Fourier implica che si debba conoscere a priori l'espressione analitica della funzione associata al segnale. Ciò è possibile solo nel caso di segnali deterministici come ad esempio nei segnali canonici appena visti.

Lo sviluppo dei filtri analogici ha consentito, nei primi decenni del secolo, di eseguire la trasformata elettronicamente attraverso due diverse metodologie:

- 1) a filtro mobile (sweep filter)
- 2) attraverso un banco di filtri

Il primo dei due sistemi impiega un filtro passa-banda molto stretto di cui è possibile intonare la frequenza centrale. Eseguendo un sweep della frequenza di centro banda è possibile diagrammare il valor all'uscita del filtro che fornisce così una stima dello spettro d'ampiezza.

Il secondo metodo impiega un banco di filtri passa-banda in parallelo la cui risoluzione dipende dal numero effettivo di filtri. Molto spesso veniva utilizzata una risoluzione di un terzo d'ottava che può essere adeguata per misure acustiche di tipo architettonale e preliminare ma totalmente insufficiente per misure più approfondite. L'avvento delle tecniche digitali ha consentito lo sviluppo di metodologie d'analisi molto sofisticate e di grande precisione. Oggi l'analisi di Fourier viene realizzata con metodi numerici rendendo così possibile l'implementazione via software (programmi per computer) o via hardware (analizzatori di spettro dedicati). Questo argomento verrà ripreso dopo aver preso in considerazione la rappresentazione digitale dei segnali.

2.1 Introduzione ai filtri

In questo capitolo ci occuperemo della rappresentazione numerica (digitale) dei segnali, ma prima di affrontare l'argomento è utile introdurre, almeno nelle linee generali, i filtri. Tali dispositivi entrano a far parte della catena di conversione analogica-digitale e digitale-analogica e quindi è indispensabile una trattazione preliminare.

Come molti altri processi e tecniche per l'elaborazione e generazione del suono, il filtraggio può essere realizzato per via analogica o digitale. In questa introduzione ci riferiremo a strutture filtranti fondamentali, indipendentemente dalla loro implementazione.

I filtri sono dispositivi atti a selezionare bande frequenziali dei segnali. Da un punto di vista sistemistico consideriamo un filtro come un oggetto che accetta un segnale al suo ingresso e che fornisce la versione elaborata alla sua uscita.



La funzione di un filtro è quella quindi di cambiare (staticamente o dinamicamente) le caratteristiche timbriche del suono modellando lo spettro. Tale cambiamento si attua attraverso la modifica delle componenti di ampiezza e fase del segnale all'ingresso. Questo paragrafo descrive alcune strutture tipiche di filtraggio normalmente impiegati nei processi di elaborazione del suono.

Un filtro può essere descritto attraverso due caratteristiche, rispettivamente operanti nel dominio del tempo (*risposta impulsiva*) e della frequenza (*risposta in frequenza*).

Potendosi facilmente derivare l'una dall'altra, nelle applicazioni pratiche risulta più conveniente descrivere il comportamento di un filtro nel dominio della frequenza.

La risposta in frequenza di un filtro è descritta completamente dalla *risposta di ampiezza* e dalla *risposta di fase*: la prima descrive l'andamento del rapporto dell'uscita del filtro rispetto al suo ingresso stimolato da un segnale sinusoidale; la seconda descrive invece la quantità di sfasamento introdotta dal filtro sullo stesso segnale ed entrambe queste caratteristiche variano in funzione della frequenza.

Il diagramma dell'andamento della risposta in frequenza (ampiezza) consente di identificare la tipologia del filtro. Le principali categorie filtranti sono :

- 1) passa-basso
- 2) passa-alto
- 3) passa-banda
- 4) elimina-banda

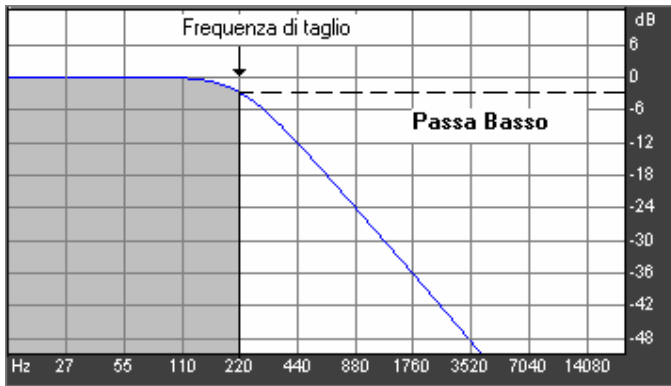


Fig. 1.2

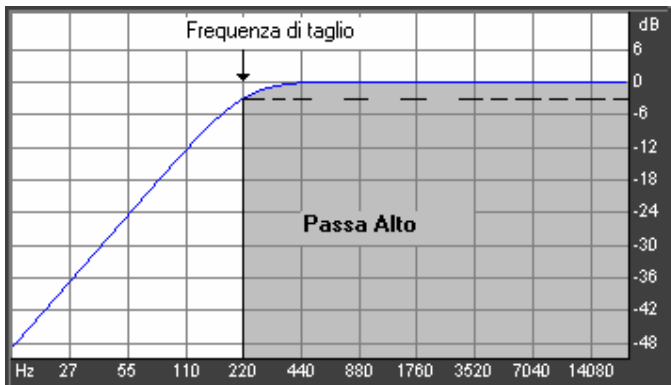


Fig. 2.2

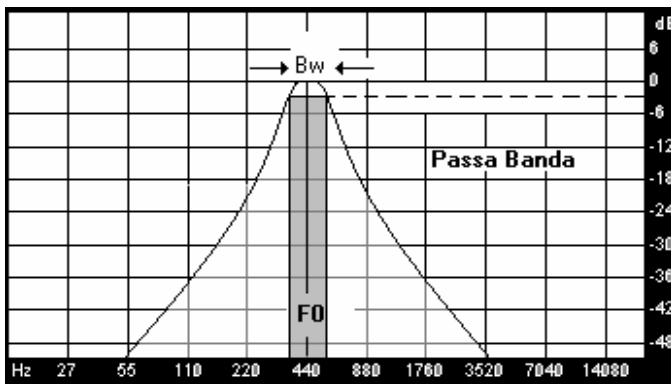


Fig. 3.2

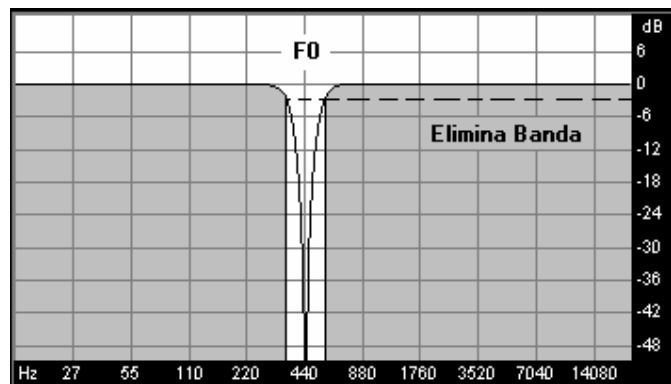


Fig. 4.2

Come si vede dalle figure 1.2, 2.2, 3.2, 4.3, la banda passante, ovvero le frequenze che non vengono attenuate sono delimitate da un valore critico detto **frequenza di taglio** (cutoff).

Tale valore coincide ad un valore di attenuazione della curva di risposta pari a -3dB ovvero una riduzione di circa 0.707 rispetto al valore di massima ampiezza. Nei filtri passa-banda ed elimina-banda sono presenti due frequenze di taglio (superiore ed inferiore), ma generalmente si fa riferimento alla **frequenza centrale (F0)**.

Nelle figure citate, la banda passante di ciascun filtro è rappresentata dall'area scura.

La capacità di selezionare in modo preciso una certa banda di frequenze viene misurata con la sua **selettività**. Generalmente, per il passa-basso / passa-alto la selettività coincide con la pendenza con la quale la risposta tende a diminuire al di fuori della banda passante e viene misurata in decibel/ottava (**db/oct**). In molti casi questa pendenza è scalata per multipli di 6 ovvero si possono avere valori di 6, 12, 18, 24..ecc dB/oct. Per i filtri passa-banda e elimina-banda, la selettività può essere identificata più precisamente tramite la differenza tra la frequenza di taglio superiore e quella inferiore.

La risposta di un passa-banda può essere caratterizzata da un altro parametro **definito fattore di qualità** (o fattore di merito) o semplicemente Q. Quando le due frequenze di taglio sono definite a -3dB , Q è dato da:

$$Q = F0 / BW$$

Quindi, alti valori del parametro Q indicano un banda passante molto stretta.

Per il filtro elimina-banda valgono le stesse considerazioni del passa-banda, ma in più si può considerare la quantità di attenuazione al centro della banda attenuata.

Data l'enorme importanza delle strutture filtranti nel campo dell'audio, l'argomento verrà ripreso nell'ambito della sintesi sottrattiva in ambito digitale.

2.2 Dall'analogico al digitale

La moderna tecnica del trattamento dei segnali audio ha compiuto durante quest'ultimo ventennio una rapida evoluzione cosicché si è passati in breve tempo da un'epoca caratterizzata dal dominio della tecnologia analogica a quella dominata dalla tecnologia digitale (o numerica), quest'ultima storicamente collegata allo sviluppo dei calcolatori ed alle ricerche ed applicazioni nel campo delle comunicazioni. Uno degli aspetti più significativi della tecnologia digitale applicata ai segnali audio è rappresentato dalla possibilità di utilizzare, in una forma più controllabile e riproducibile, tutti i processi analogici già noti (si pensi per esempio alla registrazione ed alla riproduzione magnetica) e allo stesso tempo di definire nuove modalità di elaborazione (si pensi per esempio agli algoritmi di analisi e sintesi del parlato).

Il fondamento scientifico di questa tecnica moderna è rappresentato dalle teorie contenute in una disciplina nota come *elaborazione numerica dei segnali (Digital Signal Processing)* i cui campi applicativi vanno continuamente ampliandosi. Benché l'elaborazione numerica dei segnali tragga le sue origini matematiche nel lontano XVII secolo, nel corso di questi ultimi anni, con l'avvento dei calcolatori si è reso possibile un grande sviluppo di strumenti matematici innovativi. Ciò è avvenuto in parte modificando ed estendendo quelle teorie matematiche già note nello studio dei sistemi a tempo continuo ed in molti casi invece, inventando algoritmi e potenti procedimenti di calcolo. Molti di questi strumenti matematici, come ad esempio la *trasformata rapida di Fourier (Fast*

Fourier Transform o *FFT*) o la *trasformata zeta* , sono costantemente impiegati nell'analisi frequenziale di sequenze numeriche associate a segnali reali e nello studio dei filtri digitali.

L'elaborazione numerica dei segnali viene oggi impiegata in molte attività diverse nel campo scientifico e tecnologico come nelle telecomunicazioni, nell'ingegneria biomedica, nell'acustica, nelle tecniche radar, nell'ingegneria del suono e nel riconoscimento e nella sintesi del parlato, ed inoltre è estesa al caso del trattamento dei segnali bidimensionali (elaborazione delle immagini) e multidimensionali (elaborazione di dati sismici e nucleari).

3.2 Tecniche digitali e sistemi audio

Tra i maggiori vantaggi forniti dall'impiego delle tecniche digitali nei sistemi audio si può citare in primo luogo, l'elevato grado di fedeltà raggiunto dai sistemi di riproduzione rispetto ai corrispettivi sistemi analogici. Oltre a ciò, il livello qualitativo non subisce degradazioni nel tempo e la riproducibilità di un evento acustico dipende sempre meno dal mezzo di riproduzione.

Nel campo dell'ingegneria del suono, i procedimenti digitali consentono una grande flessibilità nella manipolazione dei segnali audio, offrendo l'opportunità di acquisire, elaborare e restituire i suoni anche in tempo reale. Il segnale audio digitale, in fase di produzione e *mixing* può essere copiato molte volte senza alcun aumento significativo del rumore. Queste problematiche sono comuni ad applicazioni che vanno dalla produzione discografica, al cinema, alla televisione ed alla composizione ed esecuzione di intere opere musicali. Naturalmente i sistemi digitali professionali sono ancora economicamente meno vantaggiosi delle loro controparti analogiche ma il rapido sviluppo delle tecnologie di miniaturizzazione e d'integrazione dei componenti elettronici a larga scala, sarà in grado tra non molto di ridurre drasticamente i costi di produzione.

4.2 Segnali Analogici

Nella maggior parte dei casi, le tecniche digitali sono applicate a sorgenti di tipo analogico cosicché vale la pena di ricordare le caratteristiche salienti di questa categoria di segnali. Anzitutto occorre sottolineare che in una catena audio, il suono, dapprima in forma analogica, viene trasformato in forma numerica (digitale), elaborato e riconvertito di nuovo in forma analogica.

Il termine *analogico* si riferisce al fatto che le caratteristiche fisiche di un segnale sono trasformate in caratteristiche analoghe di un mezzo diverso. Così le variazioni di pressione atmosferica di un segnale acustico vengono trasformate in variazioni di tensioni elettrica quando si effettua una trasduzione per mezzo di un microfono. In genere i segnali analogici sono anche segnali continui nel tempo e nell'ampiezza.

In realtà la continuità nel tempo è una caratteristica più forte della continuità in ampiezza dal momento che in casi particolari, alcuni segnali possono presentare discontinuità nell'ampiezza ed essere ancora considerati analogici.

In una convenzionale registrazione magnetofonica la continuità temporale del segnale è rappresentata dalla continuità fisica del supporto magnetico mentre la continuità d'ampiezza dalla continuità della magnetizzazione.

Purtroppo, la precisione di queste rappresentazioni dipendono dalle qualità fisiche e meccaniche del dispositivo di registrazione ed in tal modo ad ogni minima degradazione del dispositivo corrisponde un'alterazione, il più delle volte ineliminabile, nell'informazione registrata. Tutto questo avviene poiché la grandezza tempo è indissolubilmente legata ad una grandezza fisica di rappresentazione (in questo caso una distanza) rigidamente connessa con la rappresentazione dell'ampiezza.

5.2 Il Segnale digitale

Un segnale, nella sua accezione più astratta, è un'entità che trasporta informazione associata ad un qualche sistema fisico ove l'informazione è costituita dalle variazioni spazio-temporali di una o più grandezze proprie del sistema.

Nel concreto, i segnali sono entità reali e possono essere rappresentati matematicamente attraverso funzioni di una o più variabili dipendenti rispetto a variabili indipendenti. Per esempio, un suono può essere rappresentato convenientemente con una funzione che esprima le variazioni di pressione atmosferica in relazione al tempo mentre un'immagine televisiva può essere rappresentata come una variazione di luminosità in funzione di una coppia di coordinate spaziali ed una variabile temporale. I segnali digitali sono rappresentati da sequenze numeriche che ne descrivono completamente l'andamento. Tali sequenze possono derivare da un processo di conversione digitale di una grandezza analogica o possono essere generate direttamente per sintesi. In entrambi i casi, le sequenze sono costituite da insiemi numerici limitati e definiti solo per valori discreti del tempo.

6.2 Il Processo di Conversione Analogica/Digitale

La trasformazione di un segnale dalla forma analogica a quella numerica (digitale), è concettualmente un processo piuttosto semplice e consiste essenzialmente nel prelevamento dei suoi valori istantanei (*campioni*) ad intervalli di tempo definiti.

L'intero processo di conversione è in realtà costituito da due fasi di discretizzazione che, pur contemporanee, possono essere considerate separatamente per chiarezza ed identificate con i termini di *campionamento* e *quantizzazione*. In questo modo, la conversione numerica di una grandezza analogica variabile nel tempo, si attua attraverso il campionamento, che ne discretizza i valori temporali e la quantizzazione che ne discretizza i valori d'ampiezza. Tuttavia, con il termine campionamento si è soliti indicare brevemente l'intero processo di conversione.

I sistemi che realizzano la conversione devono essere in grado di effettuare una trasformazione dei segnali da analogici a digitali provvedendo allo stesso tempo ad un'opportuna codifica dei valori campionati. Normalmente viene impiegata la tecnica PCM (Pulse Code Modulation) ovvero la Modulazione ad Impulsi in Codice. Sebbene la tecnica PCM inventata da A. Reeves (1938) sia di gran lunga la più diffusa, esistono altre possibilità di codificare i segnali in forma numerica come la DM (Delta Modulation) o la ADPCM (Adaptive PCM)

In figura 5.2 e 6.2 sono mostrati gli andamenti rispettivamente di un segnale continuo (analogico) e del suo *campionamento istantaneo*.

Il segnale analogico deve essere mantenuto entro limiti di ampiezza massima prefissati (+A/-A) al fine di evitare fenomeni di saturazione che porterebbero ad una ineliminabile distorsione della forma d'onda.

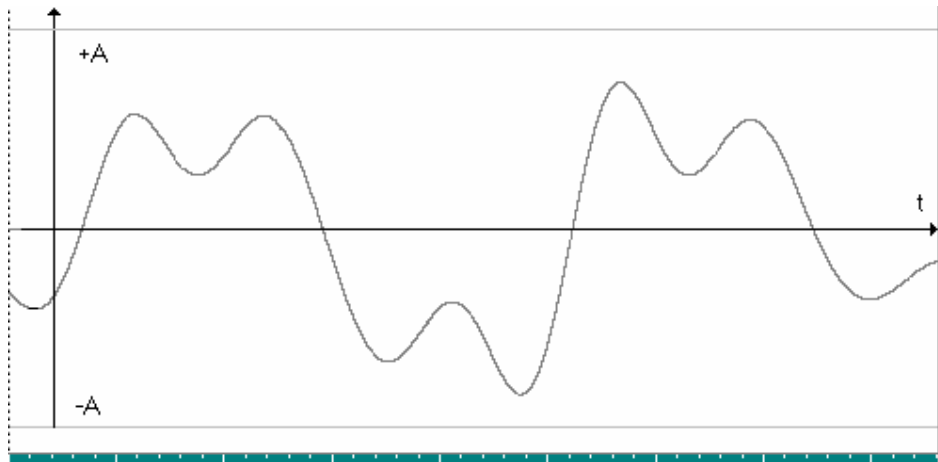


Figura 5.2 Forma d'onda del segnale analogico prima del processo di conversione

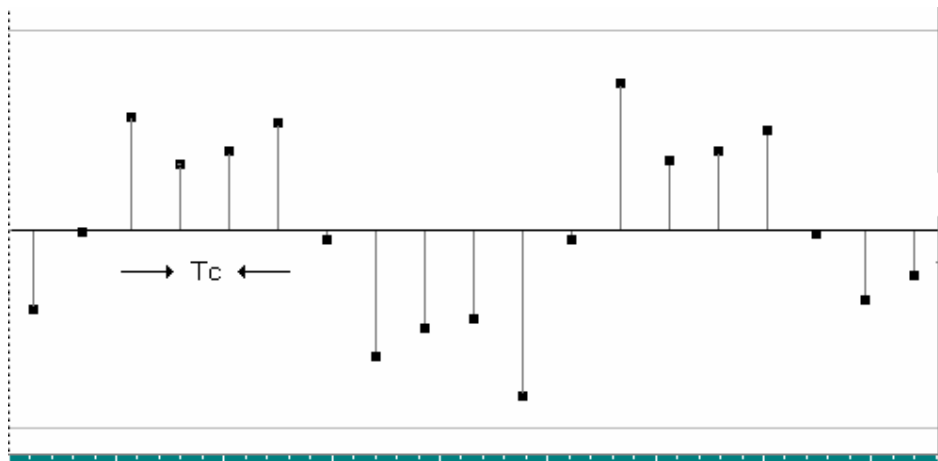


Figura 6.2 Forma d'onda del segnale analogico dopo del processo di conversione

Il termine istantaneo è riferito al fatto che il prelevamento dei campioni del segnale avviene in corrispondenza di impulsi di durata infinitesima; nella realtà ciò avviene in modo approssimato dal momento che gli impulsi di campionamento possiedono una durata finita, e proprio in virtù di questo, la figura 6.2 rappresenta una idealizzazione del processo di campionamento. Naturalmente, quanto più la durata degli impulsi è breve, tanto più ogni singolo campione tende a rappresentare correttamente il valore istantaneo del segnale. Normalmente si accetta che il valore numerico che esprime il campione sia mantenuto costante (holding completo) per un tempo pari al periodo di campionamento T_c come mostrato in figura 7.2; in questo modo si introduce una deformazione del segnale campionato che consiste in una attenuazione progressiva delle componenti spettrali di ampiezza unitamente ad un certo sfasamento: alla metà della frequenza di campionamento $F_c/2$, l'attenuazione è di circa 4 dB.

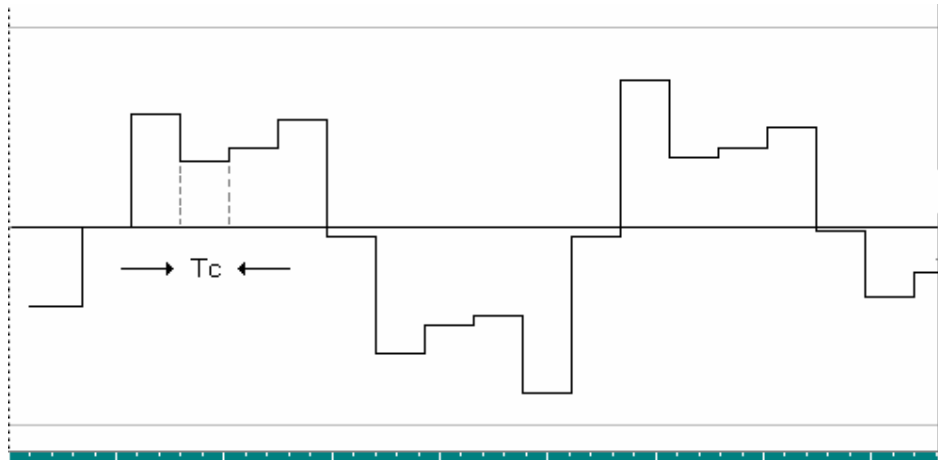


Figura 7.2 Forma d'onda del segnale campionato con "hold" completo di ordine zero

La qualità della conversione numerica del segnale dipende da come sono scelti i parametri coinvolti nell'intero processo e dalla precisione con la quale questi parametri possono essere rappresentati. In generale si può asserire che la frequenza di campionamento determina la larghezza di banda del segnale campionato mentre la precisione della quantizzazione determina il tasso di distorsione e la gamma dinamica totale.

7.2 Il Teorema Generale del Campionamento

La teoria matematica della conversione analogica/digitale poggia le basi sul famoso *Teorema del Campionamento* attribuito a H. Nyquist e già analizzato nel 1841 da Cauchy. Il teorema afferma che un segnale continuo a banda limitata, può essere rappresentato completamente da un insieme discreto di valori quando la frequenza di campionamento (F_c) è almeno il doppio della frequenza più alta contenuta nel segnale.

In altri termini, se indichiamo con BW la frequenza più elevata contenuta in un segnale continuo ed F_c la frequenza di campionamento, siamo in grado di esprimere correttamente il suo andamento se risulta :

$$F_c \geq 2 BW$$

dove $F_c = 1/T_c$

Il teorema ci consente quindi di rappresentare completamente l'andamento del segnale attraverso la conoscenza di un numero finito di valori del segnale stesso.

Supponiamo che il segnale analogico sia costituito da una forma d'onda sinusoidale di frequenza F . In figura 8.2 è mostrato l'andamento del segnale campionato con una frequenza di campionamento 8 volte più grande della frequenza F ; in questo modo ogni periodo completo del segnale originale viene rappresentato con 8 valori numerici (8 campioni). Ad esempio se il segnale ha una frequenza $F = 500$ Hz, allora $F_c = 4000$ Hz.

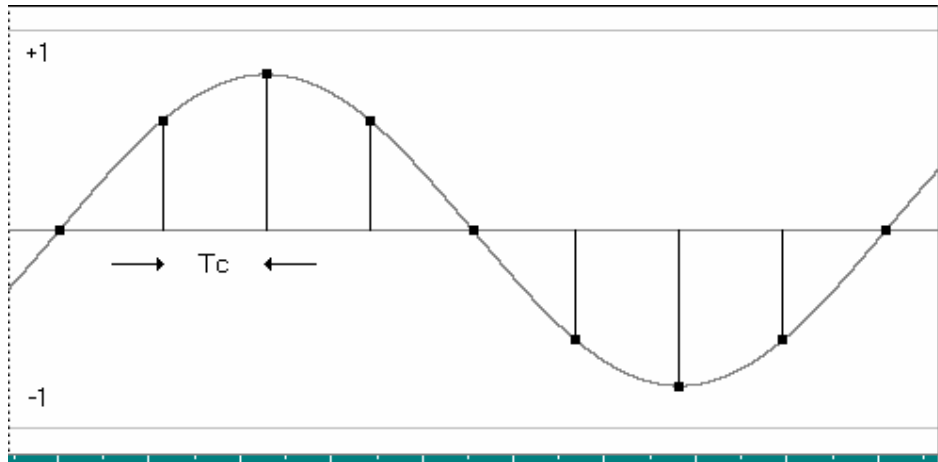


Figura 8.2 Segnale sinusoidale di frequenza F campionato con un rapporto $F_c/F = 8$

Come si può facilmente notare, la sinusoide viene campionata con un numero di valori molto più elevato rispetto a quanto richiesto dal teorema del campionamento. In genere però i segnali sono di natura più complessa e quindi costituiti non più da una oscillazione sinusoidale, bensì da una grande quantità di componenti sinusoidali. A seconda del tipo di sorgente, i segnali possono avere natura periodica, pseudo-periodica o completamente aperiodica

È importante conoscere il valore della componente a frequenza più elevata contenuta nel segnale da campionare. Ad esempio, sempre riferendoci alla figura 8.2, se il segnale è costituito dalla somma di più componenti sinusoidali in rapporto armonico con la frequenza F , la seconda componente possiede una frequenza pari a $2F$; allora mantenendo inalterato il valore della frequenza di campionamento, il rapporto $F_c/2F$ si riduce da 8 a 4 (Cfr. 9.2), un valore che ancora soddisfa il teorema del campionamento, ma che esprime un periodo del segnale con soli 4 campioni. Estendendo il ragionamento, la quarta componente armonica viene campionata con soli due valori che rappresentano il limite inferiore del teorema. Inoltre può verificarsi che i due unici valori prelevati sono entrambi nulli dal momento che coincidono con i valori del seno rispettivamente per angoli di 0 e π .

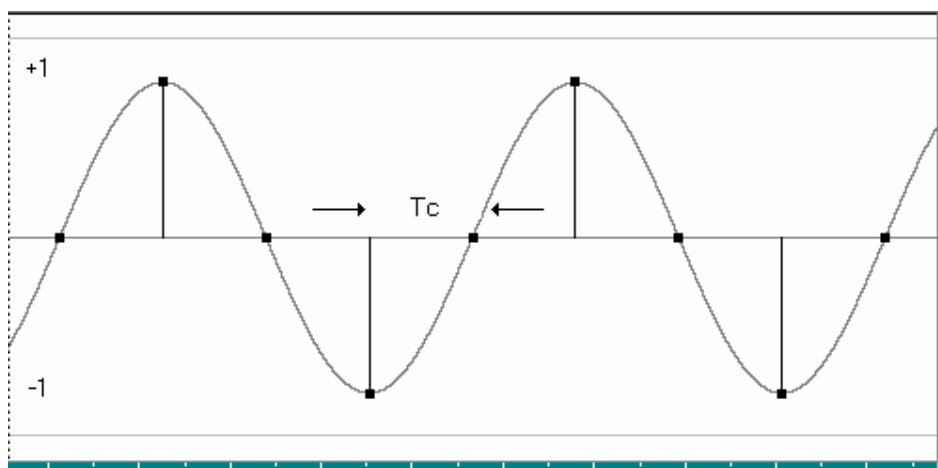


Figura 9.2 Forma d'onda del segnale analogico prima del processo di conversione

Quando il rapporto tra la frequenza di campionamento e la frequenza del segnale analogico è inferiore a 2, non essendo più soddisfatta la relazione 1.1, il campionamento fallisce. Si verifica allora il fenomeno dell'*aliasing* (o fold-over), che consiste in una errata interpretazione dei campioni prelevati durante il processo di conversione. In figura 10.2 è mostrato l'effetto della digitalizzazione di una forma d'onda sinusoidale di frequenza F con una frequenza di campionamento $F_c = 4/3 F$. Tale valore, essendo minore del limite minimo richiesto dal teorema, produce un errore evidente nell'interpretazione della frequenza del segnale (*aliasing*) campionato. Tutte le volte che ciò accade, viene ricostruito un segnale la cui frequenza apparente vale $F_c - F$ e ciò può essere pensato come l'effetto di una riflessione della frequenza reale rispetto alla frequenza di campionamento.

Ad esempio, campionando un segnale sinusoidale di frequenza 12 KHz con una frequenza di campionamento pari a 20 KHz, esso viene interpretato, dopo la conversione, come un segnale la cui frequenza vale 8 KHz. Nelle forme d'onda complesse, il fenomeno dell'*aliasing* introduce tante componenti sinusoidali estranee allo spettro quante sono quelle la cui frequenza eccede il limite $F_c/2$. L'effetto dell'interazione tra le frequenze delle componenti proprie (valori inferiori a $F_c/2$) e le frequenze riflesse, dipende dal rapporto F_c/F .

Nei segnali le cui componenti sono legate tra loro da una successione di numeri interi del tipo $F, 2F, 3F, 4F$ etc., se il rapporto F_c/F è un intero, le componenti si riflettono con frequenze che appartengono alla successione stessa e producono una distorsione della forma d'onda di tipo armonico, cioè si produce un'alterazione nell'ampiezza di componenti che già esistono; nel caso opposto in cui il rapporto F_c/F non è un intero, le componenti riflesse assumono valori frequenziali che non coincidono con i valori delle componenti reali (*interleaving*). In figura 11.2 è mostrato quest'ultimo caso attraverso la rappresentazione spettrale del segnale.

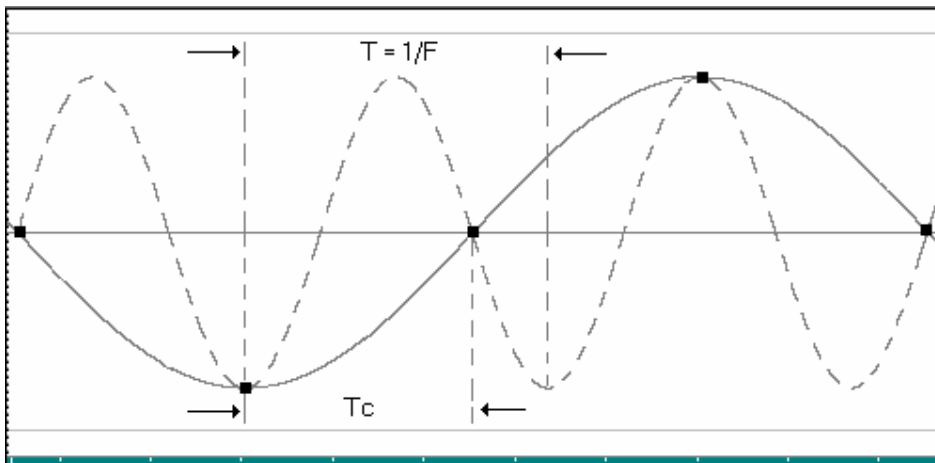


Figura 10.2 Aliasing. La frequenza di campionamento è inferiore al limite minimo essendo in questo caso $F_c = 4/3 F$. Ne risulta un segnale la cui frequenza apparente vale $F_c - F$

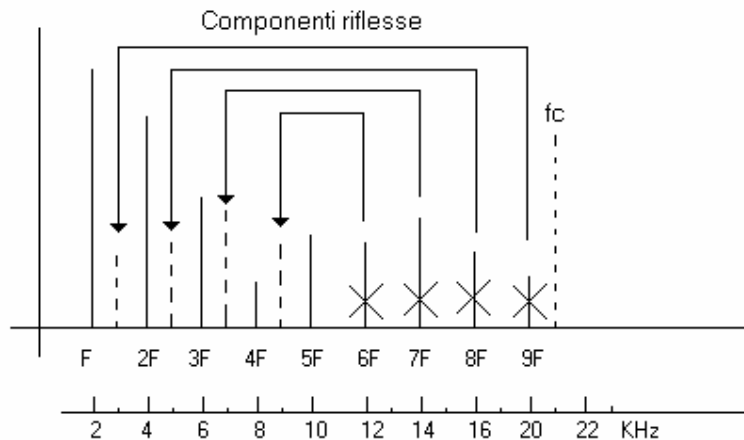


Figura 11.2 Riflessione con interleaving. Le componenti 6,7,8,9 di un segnale con fondamentale $F = 2$ KHz e campionato con $F_c = 21$ KHz vengono riflesse con valori di frequenza $1.5F, 2.5F, 3.5F, 4.5F$

Da quanto esposto, appare chiaro che la frequenza di campionamento gioca un ruolo di primo piano nella rappresentazione numerica dei segnali. Nel processo di digitalizzazione, spesso non si conosce a priori l'esatto contenuto di energia spettrale del segnale ed inoltre non è noto il valore della componente a frequenza più elevata in esso contenuta. La soluzione di questo problema sta nel valutare la necessaria larghezza di banda nel segnale ed imporre il limite frequenziale superiore mediante l'azione di un filtro passa-basso che operi prima della conversione.

Per esempio, nella digitalizzazione di un segnale audio ad alta fedeltà (HI-FI), occorre garantire una larghezza di banda non inferiore a 16 KHz; con questa scelta si impone un frequenza di campionamento di almeno 32 KHz e l'impiego di un filtro passa-basso (Fig. 1.7) la cui risposta sia tale che tutte le componenti di frequenza superiore a 16 KHz (frequenza di Nyquist) vengano rimosse o quanto meno fortemente attenuate. La presenza del filtro è quindi necessaria per prevenire la riflessione di componenti di frequenza maggiore della frequenza di Nyquist e per tale motivo viene talvolta indicato come *filtro anti-aliasing*.

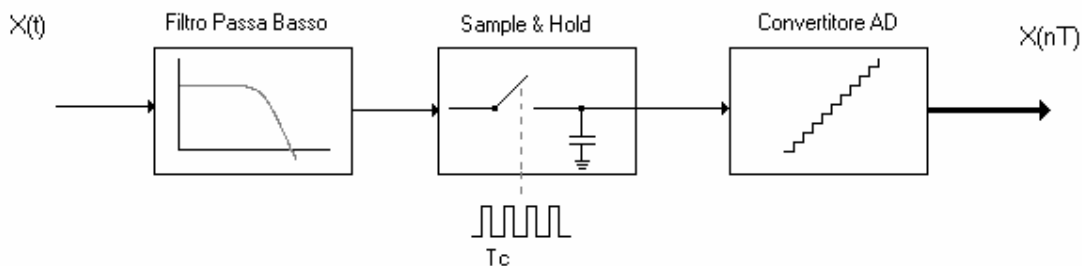


Figura 12.2 Componenti principali di un sistema di conversione analogica/digitale

Essendo il primo dispositivo che il segnale incontra durante il processo di conversione, il filtro deve poter rispettare le specifiche frequenziali richieste senza però introdurre apprezzabili degradazioni nel segnale stesso. La fonte di possibili deterioramenti del segnale è duplice: da un lato, il grado di ingegnerizzazione del dispositivo, che se scarsamente curato può essere fonte di rumore ineliminabile; dall'altro il rispetto delle specifiche progettuali. In quest'ultimo caso si può verificare che il raggiungimento delle specifiche principali (frequenza di taglio, banda passante, banda di transizione e banda di attenuazione) porti per esempio ad un'elevata ondulazione (*ripple*) nella risposta in frequenza o a non linearità nell'andamento della risposta in fase tali da indurre non solo modificazioni spettrali ma anche fenomeni di dispersione temporale (*time-smearing*).

Nei sistemi conversione professionali, sia per la produzione audio che per la ricerca in laboratorio, il filtro antialiasing deve necessariamente rispondere a requisiti di elevata qualità e prestazioni.

8.2 Spettro dei Segnali Campionati

Il processo di campionamento può essere visto matematicamente come una moltiplicazione nel dominio del tempo tra il segnale da convertire ed un treno di impulsi distanziati l'uno dall'altro della quantità $T_c = 1/F_c$. Alla moltiplicazione nel dominio del tempo corrisponde l'operazione di *convoluzione* nel dominio della frequenza. Questa operazione, della quale ci occuperemo più in dettaglio nel seguito, consente di evidenziare l'interazione spettrale tra il segnale analogico ed il segnale di campionamento. Supponendo idealmente che gli impulsi di campionamento abbiano durata infinitesima ed una frequenza di ripetizione pari a F_c , la loro rappresentazione spettrale è ancora una sequenza di impulsi frequenziali (componenti) intervallati della quantità F_c , come mostrato in figura 13.2.

Ad esempio, lo spettro di un treno di impulsi di ampiezza unitaria e di frequenza $F_c = 32$ KHz, è costituito da componenti di ampiezza costante a frequenze multiple intere di F_c ($\pm F_c, \pm 2F_c, \pm 3F_c, \text{etc.}$). Il prodotto tra i due segnali genera una traslazione dello spettro del segnale analogico in coincidenza delle componenti del treno di impulsi. Tutto ciò è illustrato in figura 14.2.

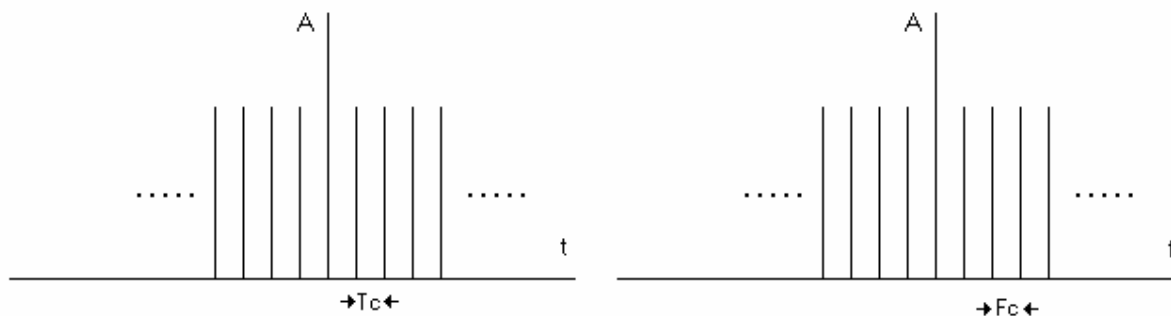


Figura 13.2 La sequenza degli impulsi di campionamento e la corrispondente rappresentazione spettrale.

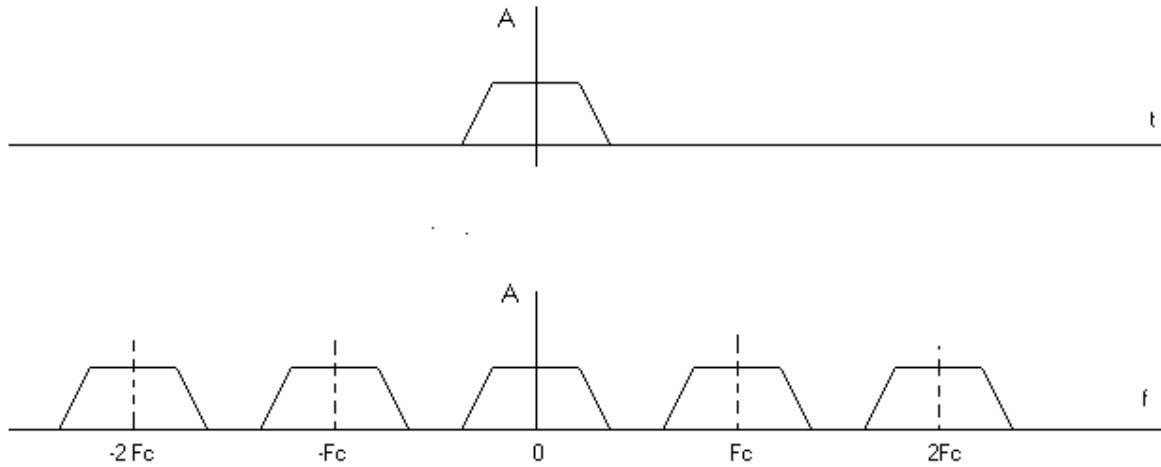


Figura 14.2 Spettro del segnale prima e dopo la conversione . Si notino le repliche della banda base.

Sempre in figura 14.2 si può osservare che la massima frequenza presente in *banda base* (spettro del segnale analogico) F_{max} , è minore del valore $F_c/2$. In tale modo viene rispettato il teorema del campionamento e come conseguenza positiva di questo fatto, le varie repliche, pur aumentando notevolmente l'energia spettrale del segnale, rimangono frequenzialmente separate. Ciò consente, in un secondo tempo, la ricostruzione del segnale stesso o una sua versione elaborata, attraverso l'eliminazione delle repliche ottenuta con un filtro passa-basso. Dal momento che gli impulsi di campionamento hanno normalmente una durata finita τ , l'ampiezza delle componenti spettrali non sarà più costante, bensì varierà secondo una curva del tipo $\sin(x)/x$ (Cfr. figura 15.2).



Figura 15.2 Se la durata di ciascun impulso è finita, allora lo spettro non è più piatto ma segue l'andamento della funzione $\sin(x)/x$.

I punti di attraversamento orizzontale della funzione $\sin(x)/x$, sono direttamente legati all'inverso del valore di durata del singolo impulso ed a tutti i suoi multipli interi. Se la durata degli impulsi è molto prossima a zero (caso ideale), il primo attraversamento $1/\hat{O}$ assume un valore elevato ed il primo lobo della curva $\sin(x)/x$ risulta molto esteso e poco pendente.

Nella pratica, essendo \hat{O} un valore piccolo ma non nullo, l'attenuazione dovuta alla curva $\sin(x)/x$ riduce in maniera proporzionale le repliche spettrali del segnale analogico che sono simmetricamente centrate sulle componenti del segnale di campionamento, compresa la replica centrata a 0 Hz, cioè la banda base stessa.

Se da un lato questo tipo di comportamento determina una distorsione spettrale in banda base, dall'altro riduce drasticamente l'energia spettrale aggiuntasi per l'effetto del campionamento, e ciò a beneficio di una migliore capacità di eliminazione di questa extra-energia che, ai fini della ricostruzione dell'informazione originale, è assolutamente inessenziale.

Nella figura 16.2, è mostrata l'attenuazione delle repliche dovuta alla durata finita degli impulsi di campionamento. Nel caso specifico, ogni impulso ha una durata pari al periodo di campionamento T_c ; infatti i punti di attraversamento della funzione $\sin(x)/x$ coincidono con i multipli interi della frequenza di campionamento F_c . Alla frequenza di Nyquist, come già anticipato in precedenza, l'attenuazione è pari a circa 4 dB. Se la banda del segnale analogico viene mantenuta al di sotto della frequenza di Nyquist ($F_c/2$), l'attenuazione dovuta al termine $\sin(x)/x$ è minore di 4 dB.

Per diminuire il rischio dell'aliasing, è opportuno che il rapporto tra F_c e la massima frequenza presente nel segnale sia un poco maggiore del limite teorico minimo previsto dal teorema del campionamento. Nelle applicazioni pratiche il valore di questo rapporto viene elevato da 2, limite minimo teorico, a 2.5. Nei sistemi di qualità professionale per i quali è richiesta una banda audio di 20 KHz, il rapporto 2.5 implica una frequenza di campionamento di 50 KHz.

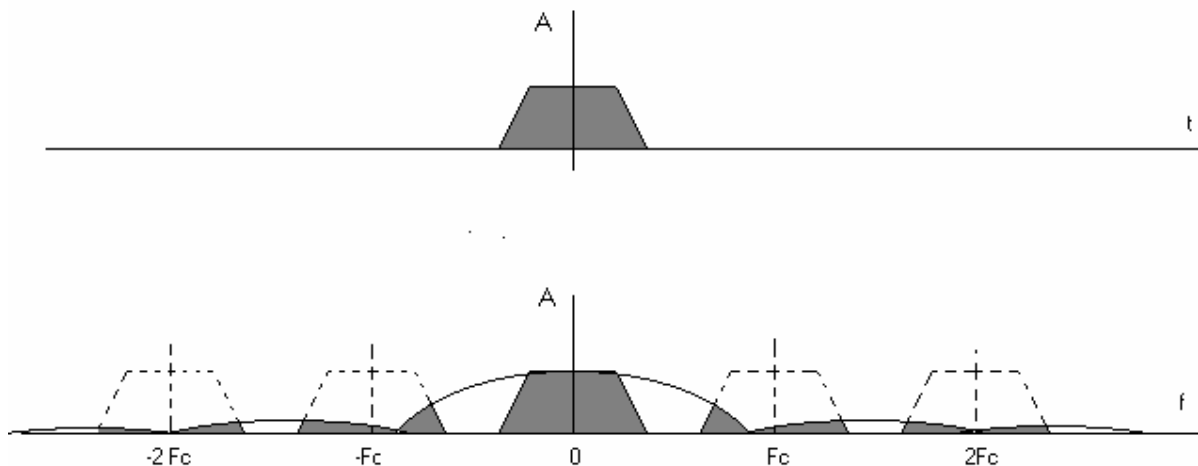


Figura 16.2 Per effetto della durata finita degli impulsi di campionamento, le repliche spettrali sono attenuate secondo la curva $\sin(x)/x$.

Quando i segnali digitali vengono utilizzati nei sistemi di telecomunicazione, valori elevati della frequenza di campionamento determinano un maggior consumo di banda di trasmissione, diminuendo così il numero massimo di messaggi trasmessi simultaneamente. Per esempio, nelle reti telefoniche digitali, la frequenza di campionamento tipica è di 8 KHz con una banda utile inferiore ai 4 KHz, valore ancora sufficiente per mantenere inalterata l'intelligibilità dei messaggi. L' AES (Audio Engineering Society) raccomanda 48 KHz per gli studi di registrazione digitali e 32 KHz per le applicazioni relative alla diffusione e trasmissione di segnali audio di qualità. Lo standard più noto è sicuramente quello impiegato nel *Compact Disc* (CD) ove viene impiegata una frequenza di campionamento di 44.1 KHz. Questo valore apparentemente strano, deriva dall'esigenza di sincronizzare i campioni audio con i formati dei *frames* d'immagine nell'adattamento dei registratori video da 1/2 pollice per la registrazione digitale dell'audio.

Nei sistemi commerciali di elaborazione numerica del suono, è sempre più in uso la tendenza di disporre di una frequenza di campionamento variabile che di volta in volta può essere scelta opportunamente all'interno di una gamma disponibile a seconda delle esigenze particolari. Questa caratteristica, pur rendendo i sistemi più flessibili, determina una maggiore criticità nella progettazione del filtro anti-aliasing dal momento che esso deve possedere elevate prestazioni in ambiti di frequenza molto diversi tra loro. Alcuni sistemi di fascia intermedia impiegano filtri che operano su un insieme ridotto di valori, consentendo così di economizzare sui costi totali, benchè a scapito di una minore ottimizzazione dei valori delle frequenze di campionamento in rapporto alle diverse caratterizzazioni del filtro stesso.

Prima di prendere in considerazione gli argomenti sulla quantizzazione e la codifica dei segnali numerici, occorre spendere qualche parola sui dispositivi *Sample-and-Hold* o *S/H*. Come si è accennato in precedenza il *Sample-and-Hold*, è un dispositivo analogico necessario per creare brevi aperture temporali sul segnale da campionare attraverso due azioni concomitanti. All' ingresso il *S/H* si apre e si chiude alla frequenza di campionamento per brevi frazioni di tempo (*sample*) mentre all'uscita, il valore di tensione rilevato all'ingresso viene mantenuto (*hold*) per un tempo maggiore in modo tale da consentire al *Convertitore Analogico/Digitale* o *ADC* di quantizzare e codificarne numericamente il valore.

Le cause più comuni di degradazione dovute al *S/H* sono essenzialmente legate ad imprecisioni nella periodicità delle aperture-chiusure (*timing jitter*) ed errori di non linearità nella fase di tenuta. La degradazione si manifesta sotto forma di un rumore di modulazione a larga banda che si sovrappone al segnale utile. Questa distorsione può essere mantenuta sotto i limiti di udibilità se la temporizzazione possiede una tolleranza compresa tra 5 e 30 ns.

9.2 Quantizzazione dei Segnali Campionati

In precedenza abbiamo avuto modo di sottolineare che l'intero processo di conversione analogica/digitale è caratterizzato da due diverse azioni di discretizzazione. Sino ad ora ci siamo occupati della trattazione relativa alla discretizzazione dell'asse temporale. Ora vogliamo proseguire esponendo le problematiche fondamentali della quantizzazione d'ampiezza dei segnali convertiti in forma numerica.

Nella figura 12.2, l'ultimo componente della catena di conversione è rappresentato dal *Convertitore Analogico/Digitale*. Per mezzo di quest'ultimo dispositivo, il segnale, dapprima reso temporalmente discreto dal *Sample-and-Hold*, viene quantizzato e codificato. L'operazione di quantizzazione consiste nell'assegnare ad ogni campione prelevato dal *Sample-and-Hold* un livello discreto di ampiezza scelto tra un numero massimo disponibile.

Campionando un segnale sinusoidale di frequenza $F_0 = 2500$ Hz con frequenza di campionamento $F_c = 20$ KHz, ogni periodo del segnale campionato conterrà un numero di campioni $N_c = F_c/F_0$, pari ad 8. Esprimendo il periodo in funzione dell'angolo, i valori teorici dei campioni sono determinabili attraverso la valutazione diretta della funzione $\sin(\vartheta)$, con $\vartheta = n\pi/8$ ed n che assume di volta in volta i valori 0,1,2,...,7. Così facendo si ottiene la tabella seguente:

TABELLA 1

Valori della funzione seno valutata per angoli multipli di $\pi/4$

campione	ϑ	$\sin(\vartheta)$
0	0	0.000
1	$\pi/4$	0.707
2	$\pi/2$	1.000
3	$3\pi/4$	0.707
4	π	0.000
5	$5\pi/4$	-0.707
6	$3\pi/2$	-1.000
7	$7\pi/4$	-0.707

Quantizzando uniformemente l'ampiezza con 4 livelli positivi, 4 livelli negativi e un livello di zero, gli unici valori possibili per esprimere la funzione sono i seguenti:

$$0, \pm 0.25, \pm 0.50, \pm 0.75, \pm 1.$$

Si osserva immediatamente che i valori $\pm 0,707$ non possono essere espressi in modo corretto, ma solo in modo approssimato dalle quantità ± 0.75 . Ciò determina un errore dovuto proprio al numero limitato di livelli disponibili ed al loro *relativo intervallo di quantizzazione*, così come illustrato in figura 17.2.

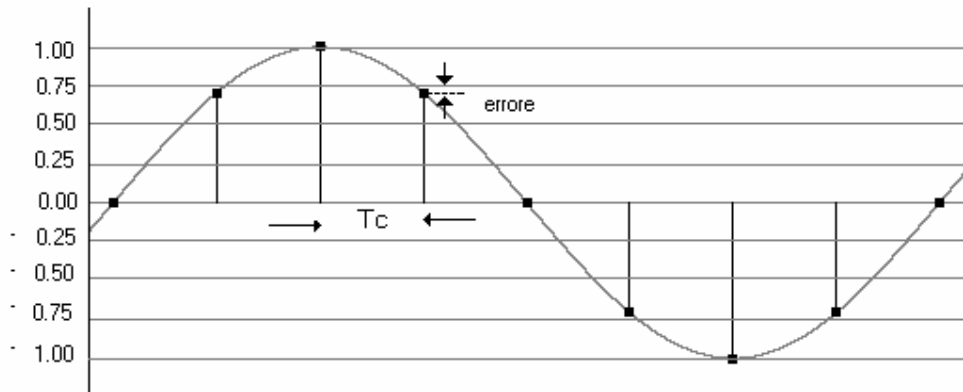


Figura 17.2 Conversione numerica di un segnale sinusoidale con 9 livelli di quantizzazione

L'errore che sempre si commette quando si rappresenta l'ampiezza di un segnale campionato attraverso un numero finito di livelli, è detto *errore di quantizzazione*. L'effetto di tale errore produce un segnale indesiderato che prende il nome di *rumore di quantizzazione*. L'errore si può ridurre al minimo aumentando considerevolmente il numero di livelli.

Nei sistemi di conversione, ogni livello viene codificato con una parola binaria costituita da M cifre binarie (bit) per un numero totale di livelli pari a 2^M . Ad esempio, impiegando una parola di 8 bit, si possono codificare $2^8 = 256$ diversi livelli. In questo caso, l'intera gamma dinamica del segnale d'ingresso è espressa su 256 valori, con una risoluzione d'ampiezza pari a $1/256$, cioè circa 0.0039. Ogni aumento di un bit nella codifica della parola binaria determina un raddoppio nel numero di livelli rappresentabili.

L'errore massimo di quantizzazione è pari alla metà dell'ampiezza di un livello. In corrispondenza di segnali di ingresso a larga banda e con elevati valori di ampiezza, l'errore di quantizzazione è rappresentabile con una variabile aleatoria la cui funzione di distribuzione della probabilità è statisticamente indipendente da campione a campione. In queste condizioni, l'errore di quantizzazione è un *rumore bianco* costante e del tutto equivalente al rumore usuale dei sistemi analogici.

Per fornire un criterio di valutazione della qualità di un sistema di conversione è uso comune riferirsi alla cosiddetta *gamma dinamica*. Essa esprime il rapporto tra il segnale ed il rumore (SNR o Signal-to-Noise Ratio) quando il rumore è additivo e stazionario. Per questo parametro vale la relazione:

$$\text{SNR(dB)} = 6.02M + 1.76$$

dove M è il numero di bit impiegati nella codifica dei livelli. Il fattore 6.02, deriva dal fatto che ogni raddoppio del numero di livelli provoca un raddoppio della massima ampiezza rappresentabile. (Risulta infatti che $20\log(2) = 6.02$ dB).

L'impiego di un maggior numero di livelli di quantizzazione consente di aumentare la dinamica totale e allo stesso tempo migliorare la risoluzione del sistema.

La dinamica di un'orchestra misurata all'interno di uno studio di registrazione può raggiungere valori prossimi a 120 dB; considerando che il livello di rumore di fondo può essere circa 20 dB, l'effettiva gamma dinamica può essere stimata circa 100 dB. Da questo esempio si intuisce che la registrazione e la riproduzione digitale di segnali musicali necessita elevati valori di dinamica, ottenibili solamente impiegando convertitori il cui numero di bit consenta di raggiungere tali valori. Nella tabella 2 sono riportate varie gamme dinamiche per diversi valori del numero di bit utilizzati dal convertitore secondo la relazione $SNR(dB) = 6.02M + 1.76$:

TABELLA 2

Gamma dinamica in funzione del numero di bit M nel convertitore

M (nr.bit)	SNR (dB)
8	49.92
9	55.94
10	61.96
11	67.98
12	74.00
13	80.02
14	86.04
15	92.06
16	98.08
17	104.10

Dalla tabella 1.3 si evince che, impiegando una codifica PCM uniforme, per garantire un'efficace gamma dinamica del sistema di conversione, occorre che il convertitore A/D impieghi una parola binaria di almeno 16 bit ed allo stato attuale ciò rappresenta una specifica standard nella codifica dei dati per il *compact disc*.

Un'elevata gamma dinamica garantisce ampie escursioni del segnale di ingresso ed inoltre riduce l'errore di quantizzazione. Il caso più critico è rappresentato dalla codifica di segnali di bassissimo livello. Campionando una sinusoide la cui ampiezza è confrontabile con il singolo livello di quantizzazione, il comportamento del sistema è del tutto equivalente ad quello di un sistema con un solo bit di codifica. In queste condizioni la forma d'onda sinusoidale, per effetto della quantizzazione, si trasforma in un onda quadra le cui componenti (dispari) si sovrappongono al segnale originale.

Nella figura 18.2 è mostrato un caso limite nel quale il segnale d'ingresso, costituito da una sinusoide di frequenza F_0 e di ampiezza pari al singolo livello di quantizzazione q , viene convertito con una frequenza di campionamento $2F_0$ ed inoltre gli istanti di campionamento coincidono con i massimi positivi e negativi del segnale stesso. Le componenti frequenziali dell'onda quadra (figura 18.2b), in questo particolare caso, vengono anche riflesse per il concomitante effetto di aliasing essendo tali componenti maggiori della frequenza di Nyquist.

Gli effetti acustici del fenomeno appena descritto, sono conosciuti con il nome di *rumore di granulazione*. Questo rumore tende a scomparire quando il livello del segnale di ingresso aumenta e, per segnali a larga banda, l'effetto dell'aliasing residuo viene mascherato dal segnale stesso.

Per ridurre al minimo il *rumore di granulazione* si ricorre a volte all'impiego di un artificio tecnico che consiste nel sommare al segnale una piccola quantità di rumore (*dither noise*) in modo da distribuire diversamente l'energia delle componenti spurie. Il dither è un segnale di rumore a basso livello che ha un'ampiezza tipica di metà di un livello di quantizzazione ($q/2$). Per effetto della presenza di questo segnale, la distorsione armonica si trasforma in una distorsione a larga banda, che viene così percepita come un rumore bianco. In altre parole, si accetta una degradazione della qualità del segnale convertito nei termini di un contenuto aumento del livello di rumore (da 3 a 4 dB).

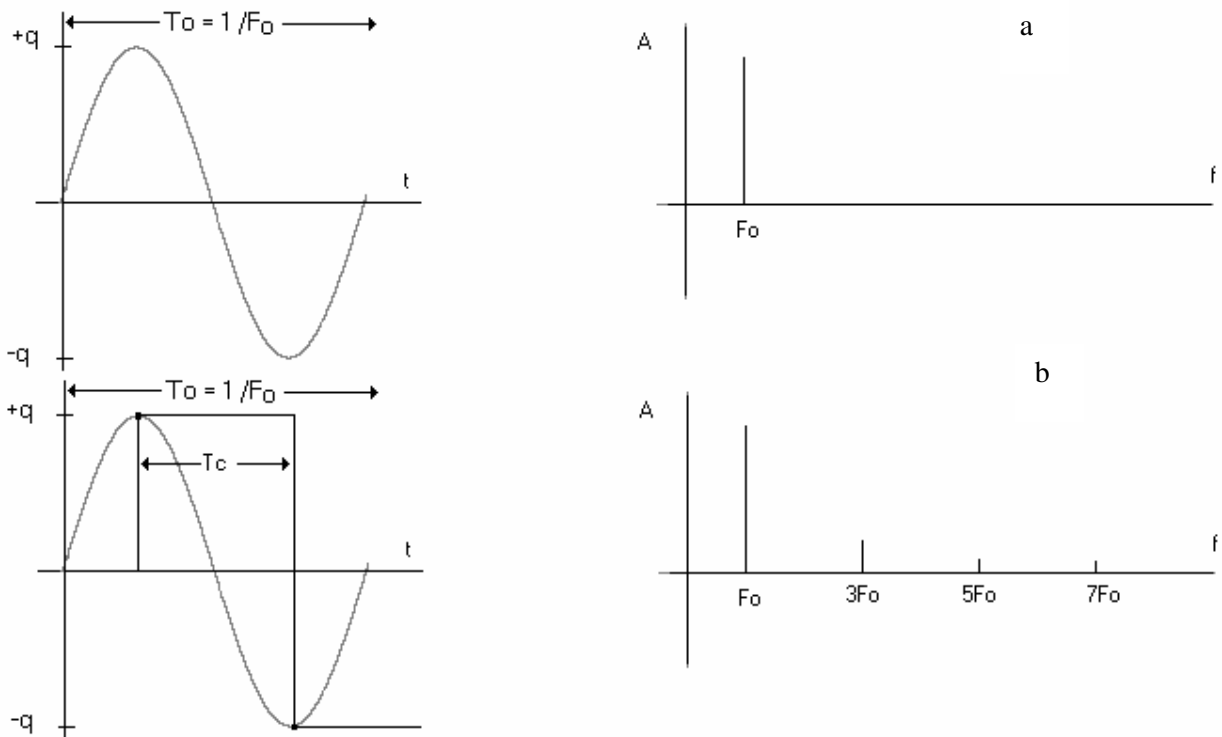


Figura 18.2 Conversione numerica di un segnale sinusoidale di ampiezza pari ad un livello di quantizzazione ($\pm q$). La figura mostra l'andamento nel tempo e in frequenza prima e dopo il processo di conversione. (a, b)

Tra le possibili cause di rumore che possono in qualche modo deteriorare la qualità del segnale, dobbiamo ricordare l'effetto di saturazione (*clipping*). Se l'ampiezza del segnale d'ingresso eccede il valore massimo consentito dal convertitore, la conseguente saturazione produce un sensibile aumento dell'energia spettrale oltre la frequenza di Nyquist. L'effetto è del tutto simile al caso precedente e tecnicamente equivale al *rumore di granulazione*. Le frequenze più criticamente interessate dal fenomeno hanno valori intorno ad $1/3F_c$ dal momento che la terza componente dell'onda quadra che si genera, coincide proprio con la frequenza di campionamento. Per risolvere questo problema, la sezione di ingresso analogica del convertitore è progettata in modo tale da limitare il segnale di circa 3 dB al di sotto del massimo valore che può essere convertito.

Altre fonti d'errore possono essere localizzate nella possibile distribuzione non uniforme dei livelli di quantizzazione dovuta a difetti di fabbricazione nei convertitori AD ed a problemi di non linearità nei Sample-and-Hold.

10.2 Codifica dei Segnali Campionati

Il numero di livelli di quantizzazione dipende essenzialmente dal numero di bit con i quali viene codificata la parola binaria che esprime ogni singolo campione. Con una parola binaria costituita da M bit è possibile codificare 2^M combinazioni diverse e quindi esprimere una numerazione compresa tra i valori 0 e 2^M-1 . Il tipo di codifica dei valori dipende dalla modalità con cui il dispositivo di conversione realizza la propria aritmetica interna. Sebbene esistano più forme di rappresentazione, la più diffusa è la rappresentazione in *complemento a due*. Il bit più significativo della parola binaria viene in questa forma utilizzato per esprimere il segno del numero rappresentato. Con questo tipo di aritmetica, è possibile rappresentare facilmente sia i numeri positivi che quelli negativi.

L'impiego di una delle 2^M combinazioni per la codifica del numero 0, genera una asimmetria nella ripartizione dei valori. Il massimo valore positivo risulta $2^{(M-1)}-1$ mentre il massimo negativo è 2^{M-1} . Ad esempio con soli 3 bit ($M=3$) si ha la seguente codifica:

0 1 1	+ 3
0 1 0	+ 2
0 0 1	+ 1
0 0 0	0
1 1 1	- 1
1 1 0	- 2
1 0 1	- 3
1 0 0	- 4

cioè $2^{(3-1)}-1 = 3$ (massimo valore positivo) e $2^{(3-1)} = 4$ (massimo valore negativo). L'errore di simmetria è tanto minore quanto maggiore è il numero di bit impiegati essendo esso pari a $1/2^M$. Per $M=16$, la gamma dei valori numerici è compresa tra -32768 (2^{15}) e 32767 ($2^{15}-1$) e l'errore è pari a $1/65536$.

La quantità $1/2^M$, rappresenta anche la risoluzione del convertitore. Se alla massima escursione del segnale analogico viene fatto corrispondere il massimo valore di ampiezza discreta, ad ogni variazione del segnale all'ingresso pari a $V/2^M$ corrisponde una variazione unitaria nella cifra binaria. In altre parole, se $V = 10$ Volt e $M = 16$, non possono essere rilevate variazioni del segnale di ingresso minori di $10/2^{16}$ (circa $152 \mu\text{Volt}$). Essendo la distribuzione dei livelli di ampiezza di tipo uniforme, l'errore di quantizzazione aumenta percentualmente man mano che diminuisce l'ampiezza del segnale d'ingresso.

Come variante alla conversione uniforme, in alcune particolari applicazioni, viene utilizzata la tecnica di *quantizzazione non-uniforme (o non lineare)* nella quale i livelli di ampiezza sono distribuiti in modo non equidistante. Generalmente, i sistemi che impiegano questo tipo di quantizzazione, prevedono un numero maggiore di livelli per la rappresentazione dei segnali con

piccoli valori d'ampiezza ed un minor numero per i segnali ad ampiezza elevata. In questo modo si ottiene un aumento del valore SNR per i segnali a basso livello ed un sensibile aumento della dinamica complessiva rispetto ad un sistema a quantizzazione uniforme che impiega lo stesso numero di bit.

A questo proposito si possono citare due metodi di codifica molto noti nel campo delle comunicazioni e in particolare nelle applicazioni della codifica del segnale vocale che sono conosciute rispettivamente come *Legge- μ* e *Legge-A* (*μ -Law*, *A-Law*). Tali codifiche sono espresse da altrettante funzioni matematiche che determinano, in entrambi i casi, una compressione del segnale secondo legami di tipo logaritmico. Se la gamma del quantizzatore è normalizzata nell'intervallo $[-1, 1]$, la Legge- μ è espressa dalla funzione:

$$F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)}$$

dove x rappresenta il segnale stesso, $\text{sgn}(x)$ la *funzione segno* di x e μ un parametro che indica il rapporto di compressione. Quanto più elevato è il valore di μ , tanto più grande è la compressione del segnale. Ad esempio, impiegando una codifica ad 8 bit ed un valore di $\mu=255$, si ottiene una gamma dinamica equivalente ad un sistema con codifica lineare a 12 bit per un incremento effettivo di 24 dB.

Nelle stesse ipotesi di normalizzazione, la Legge-A è espressa dalla funzione

$$F(x) = \text{sgn}(x) \frac{A|x|}{1 + \ln(A)} \quad 0 \leq |x| \leq 1/A$$

dove A determina la gamma dinamica. In generale, tuttavia, i sistemi digitali per la conversione dei segnali audio di alta fedeltà raramente impiegano codifiche non lineari dal momento che in queste condizioni risulta più critico il trattamento e la loro elaborazione numerica.

11.2 Altri Metodi per la Codifica dei Segnali Campionati

Sebbene l'attuale stato dell'arte nella tecnologia costruttiva dei dispositivi per la conversione digitale dei segnali, consenta di disporre sistemi a codifica lineare con più di 20 bit di risoluzione, vale la pena accennare ad alcune tecniche alternative di conversione di una certa rilevanza.

Una di queste, denominata *Floating-Point PCM* (PCM in Virgola Mobile), fa uso di un dispositivo ibrido che, oltre al convertitore vero e proprio, include una logica di controllo ed un circuito diselezione del guadagno.

Dopo la convenzionale sezione d'ingresso costituita dal filtro e dal Sample/Hold, il segnale viene inviato ad un amplificatore a guadagno variabile. La selezione del guadagno è controllata da una logica che tende a mantenere il livello del segnale all'ingresso del convertitore AD nella metà superiore della gamma dei valori numerici possibili. Non appena il segnale d'ingresso diminuisce di livello, viene selezionato un guadagno di amplificazione maggiore. In alcune implementazioni, poiché la selezione avviene tra quattro differenti guadagni (0, +6, +12 e +18 dB), la codifica è realizzata con una parola di soli 2 bit (00 = 0 / 01 = +6 / 10 = +12 / 11 = +18). Il risultato finale della conversione è composto da due parole binarie distinte: una parola binaria a 12 bit proveniente dal convertitore AD (mantissa), ed una parola binaria a 2 bit (esponente) che rappresenta un vero e proprio fattore di scala.

La decodifica della parola binaria complessiva avviene spostando di tante posizioni a destra il termine a 12 bit quante sono quelle espresse dal numero contenuto nella parola a 2 bit, tenendo conto che ogni spostamento (shift) a destra equivale ad un dimezzamento del valore. Il controllo del fattore di scala può essere *istantaneo* o *sillabico*. Se il controllo è istantaneo, il valore del guadagno appropriato viene valutato ad ogni istante di campionamento, mentre nel secondo caso, l'impostazione del nuovo valore di amplificazione è ritardata di un intervallo di tempo tipicamente compreso tra 100 e 300 millisecondi, valori comunemente confrontabili con le durate delle sillabe nel parlato o con la durata media di note musicali. L'impiego di un sistema di conversione Floating-Point, consente di aumentare la dinamica di un convertitore a 12 bit da 72 a circa 90 dB.

Mentre in un sistema di conversione PCM standard, il rumore di quantizzazione aumenta considerevolmente per segnali di basso livello, in un sistema PCM Floating-Point, il rumore di quantizzazione aumenta e diminuisce con le variazioni nel segnale analogico. Il rumore generato, aggiungendosi al segnale, può forzare il controllo di amplificazione a mutare il proprio valore.

Alla luce di questo fatto è possibile operare una distinzione tra la **gamma dinamica** (dynamic range) e il **rapporto segnale-rumore** (SNR). La gamma dinamica è allora definita come il rapporto tra il massimo valore del segnale (sinusoidale) rispetto al rumore di quantizzazione in assenza di segnale ed adottando per esso il simbolo **SNR_{ns}** (ns significa *no segnale*). La presenza di un rumore in assenza del segnale è giustificata dal fatto che, all'ingresso dei sistemi di conversione, specialmente all'interno delle sezioni analogiche, sono presenti piccoli segnali incoerenti che fanno muovere casualmente i bit meno significativi dei convertitori. Viceversa il rapporto segnale-rumore, che indichiamo con il simbolo **SNR_{cs}(S)** (cs significa *con segnale*), rappresenta la quantità di rumore misurata in presenza del segnale di livello S. Ad esempio, per un convertitore Floating-Point con 10 bit di mantissa e 3 bit di esponente si ottiene $SNR_{ns} = 102$ dB mentre il $SNR_{cs}(S) = 60$ dB.

1.3 Protocolli di comunicazione

Uno dei principali vantaggi dei segnali digitali è quello consente di trasmettere agevolmente l'informazione audio tra vari dispositivi. Ciò è reso possibile grazie alla realizzazione di protocolli (interfacce) di comunicazione da parte delle aziende, alcuni dei quali nel corso degli ultimi anni sono divenuti uno standard. I due principali standard di interfaccia di comunicazione audio-digitale sono:

- a) **AES/EBU** o IEC958 tipo 1 (Audio Engineering Society/European Broadcasting Union)
Interfaccia professionale seriale, bilanciata a due canali.
- b) **S/PDIF** o IEC958 tipo 2 (Sony Philips Digital Interface Format)
Interfaccia "consumer" seriale, sbilanciata a due canali.

Da un punto di vista del formato le due interfacce sono molto simili mentre si differenziano sostanzialmente dal punto di vista elettrico e nel tipo di connessione impiegata.

2.3 AES/EBU

Questa interfaccia è prevalentemente adottata in ambito professionale e in generale nei sistemi per le trasmissioni radio-televisive. Da un punto di vista meccanico l'AES/EBU impiega un connettore XLR nella versione maschio-femmina rispettivamente per l'uscita e per l'ingresso.

Il protocollo di comunicazione è organizzato secondo una tipologia di trasmissione elettrica *seriale* basata non su due livelli diversi di tensione (ad esempio 5Volt/ 0 Volt per indicare 1 e 0) ma secondo le rispettive transizioni (da 0 a 1 e da 1 a 0) denominata "*bi-phase mark coding*". Per trasmettere le informazioni numeriche l'AES/EBU si avvale delle scrittura di coppie di celle successive: se due celle adiacenti sono dello stesso tipo il bit trasmesso (o ricevuto) è 0, mentre se sono di tipo diverso il bit trasmesso (o ricevuto) vale 1 come esemplificato nella figura 1.3.

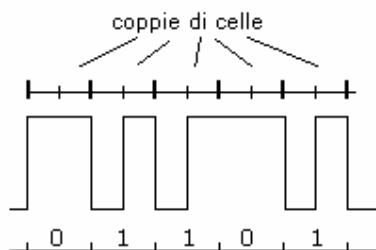


Figura 1.3 Principio di funzionamento della trasmissione "*bi-phase mark coding*" utilizzata nel protocollo AES/EBU

E' interessante notare come la trasmissione (ricezione) di un 1 avviene su celle che presentano una transizione, indipendentemente dal fatto che avvenga da uno stato basso ad uno alto o viceversa mentre per lo zero non deve esservi transizione. Il segnale varia quindi in modo discreto tra due estremi di tensione compresi tra $2/3V$ e $7/8V$ mentre l'impedenza d'ingresso ai terminali 2 e 3 del connettore XLR vale 110Ω . Il tutto è completato da uno speciale circuito elettronico di sincronizzazione denominato PLL (Phase-Locked Loop) che garantisce la stabilità della frequenza trasmissione.

I dati AES/EBU sono organizzati in *blocchi* ed ogni blocco contiene 192 *frames*. Ogni frame è sua volta suddiviso in 2 *sub-frame* ciascuno dei quali è formato di 32 bit di informazione suddivisi in due diversi codici: *codice di canale* (channel code) e *codice sorgente* (source code) come mostrato in figura 2.3.

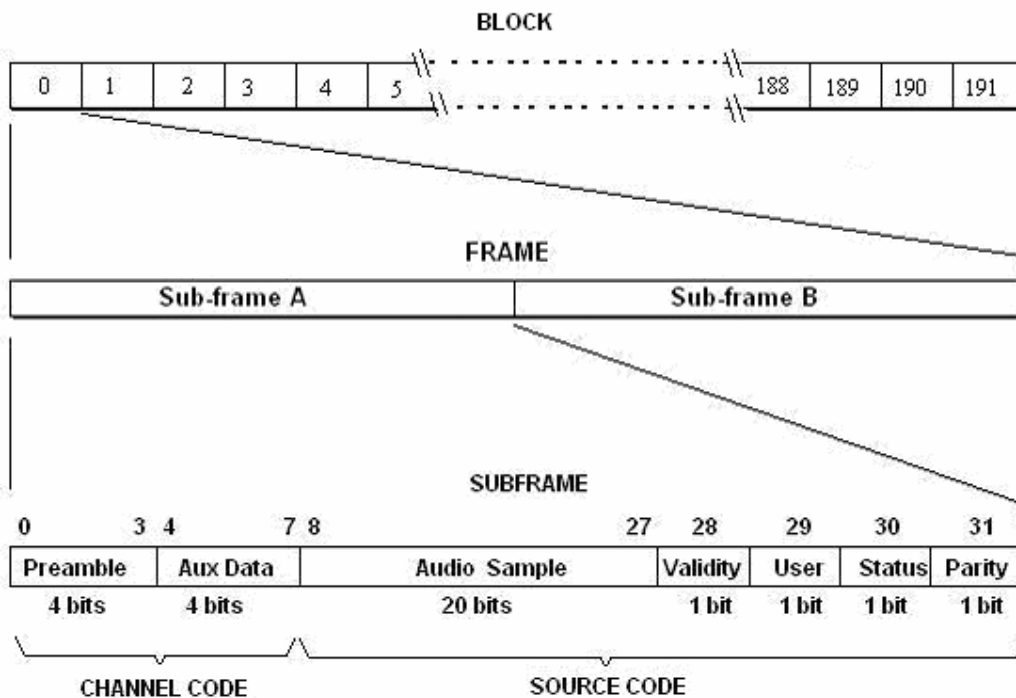


Figura 2.3 Struttura dei dati nel protocollo AES/EBU organizzati in Blocchi, Frame e Sub-Frame

Come si vede dalla figura 2.3, il valore del dato audio è posto tra il bit 8 e il bit 27 di ciascun sub-frame. I Sub-Frame A e B contengono i dati realtivi al canale Left e Right rispettivamente.

Ugni sub-frame è ripartito in campi di lunghezza diversa che contengono rispettivamente:

1. Preambolo : gruppo di 4 bit n necessario per il sincronismo. Può definire:
 - a) l'inizio di un blocco
 - b) che seguirà un sub-frame Left
 - c) che seguirà un sub-frame Right

Dal momento che ogni preambolo contiene 3 valori uguali (zero o uno) solo in questo caso vi è violazione del principio *bi-phase*, come mostrato in figura 3.3

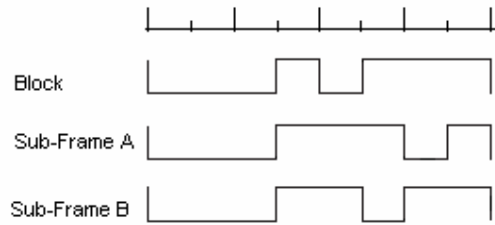


Figura 3.3 Struttura del preambolo con le prime 3 celle dello stesso valore

2. *Bit di parità*: è utilizzato per confermare che tutti i preamboli sono in fase, indipendentemente dal fatto che inizino con una transizione dal basso verso l'alto o viceversa. Si noti che il bit di parità è in effetti l'ultimo del sub-frame precedente.

Questi due campi appartengono quindi alla parte del sub-frame relativa alla trasmissione in se' e al modo in cui i dispositivi dialogano tra di loro (*channel code*). I restanti campi appartengono all'informazione vera e propria (*source code*) e assumono i seguenti significati:

1. *Aux Data*: campo di 4 bit solitamente usato per espandere i 20 bit di dato del campione consentendo così di trasmettere valori a 24 bits
2. *Audio Data*: campo a 20 bit che rappresenta il singolo campione
3. *Validity*: campo a 1 bit che informa il ricevitore quando il dato è valido (0= dato valido, 1 = dato non valido)
4. *User*: campo a 1 bit per inviare informazioni diverse. L'informazione è in realtà inviata collezionando un certo numero di questi bit fino a formare una parola. Ad esempio i DAT possono inviare su tale bit l'informazione di *Time Code*.
5. *Status*: campo a 1 bit d'impiego simile al precedente. Tipicamente può essere associato a varie informazioni come ad esempio :
 - a) *Enfasi on/off*
 - b) *Sampling rate*
 - c) *Stereo-Mono*
 - d) *Lunghezza del campione*
 - e) *Canale di origine e destinazione*

Dal punto di vista strettamente elettrico, il segnale AES/EBU utilizza cavo bilanciato a 3 poli per il trasferimento dei dati e in particolare il pin 1 per schermo e i pin 2 e 3 per il segnale bilanciato, con polarità ininfluente. Entrambi gli ingressi e le uscite sono accoppiati mediante trasformatore e svincolate dalla terra (vedi figura 4.3).

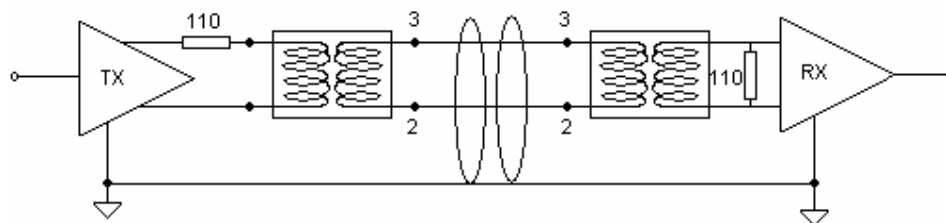


Figura 4.3 Schema elettrico dell'interfaccia AES/EBU

La lunghezza dei cavi può arrivare al massimo fino a 300 m con cavo bilanciato schermato. A seconda delle frequenze di campionamento la frequenza dei frame varia secondo la seguente tabella:

Samplig Rate	44,1 Khz	48 Khz
Tempo di rasmissione di 1 Frame	22.7 usec	20.8 usec
Frequenza di trasmissione	2.822 Mbit/sec	3.072 Mbit/sec

2.3 S/PDIF

Questo protocollo di comunicazione rappresenta in pratica la versione “consumer” dell’AES/EBU. L’interfaccia è stata sviluppata assieme da Sony e Philips (S/P) e cronologicamente precede AES/EBU. Rispetto a quest’ultima, l’interfaccia S/PDIF utilizza una connessione elettrica sbilanciata di tipo coassiale (ad esempio con cavo RG59 o simili) con connettori di tipo RCA con un’impedenza di 75 Ω , che presenta una migliore reiezione ai disturbi RF (radiofrequenza). Si possono coprire distanze dell’ordine di 10 metri ed esiste anche la possibilità di utilizzare una connessione ottica (*TOSLink*)

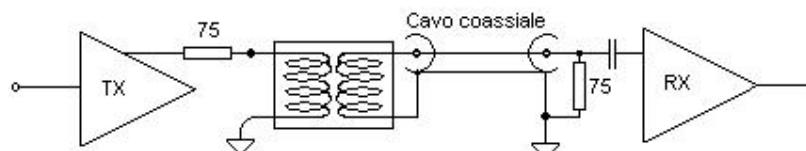


Figura 5.3 Schema elettrico dell’interfaccia AES/EBU

Nella sostanza, la struttura dell’informazione è quasi identica all’AES/EBU eccezion fatta per l’utilizzo del bit di stato come inibitore di copia. Infatti, alcuni sistemi digitali (come ad esempio alcuni DAT) hanno la possibilità di creare copie digitali che non possono successivamente essere copiate. L’inibizione della copia è realizzata ponendo a 1 il valore di uno specifico bit all’interno dei frames d’informazione. Tale sistema è conosciuto con SCSM (Serial Copy Management System). Esistono in commercio alcuni dispositivi che sono in grado di trasformare il protocollo S/PDIF in AES/EBU e viceversa e di intercettare e gestire il bit di inibizione.

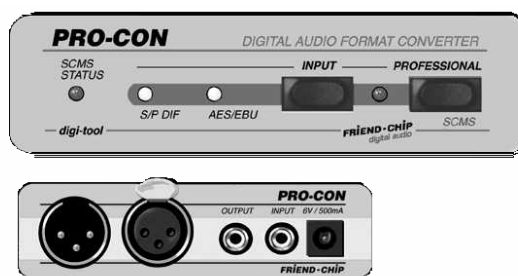


Figura 5.3 Dispositivo di conversione da S/PDIF a AES/EBU

3.3 MADI (AES10-1991)

Data la crescente tendenza all'impiego di un numero di canali audio superiore a due è stato progettato il formato MADI (Multi-channel Audio Digitali Interface). Questo tipo d'interfaccia consente di trasmettere fino ad un massimo di 56 canali audio con risoluzione a 24 bit su cavo coassiale e terminato su connettore BNC. Supporta le classiche frequenze di campionamento (32, 44.1 e 48 Khz o superiori).

La struttura dati del MADI è organizzata in frames composti da 56 canali (ovvero 28 canali stereo AES) numerati da 0 a 55. Salvo alcune lievi differenze nei primi 4 bit, il formato MADI è praticamente identico all'AES/EBU.

Da un punto di vista elettrico, il MADI è in grado di trasferire fino a 125 Mbit/sec contro i 3 Mbit/sec dell'AES/EBU

